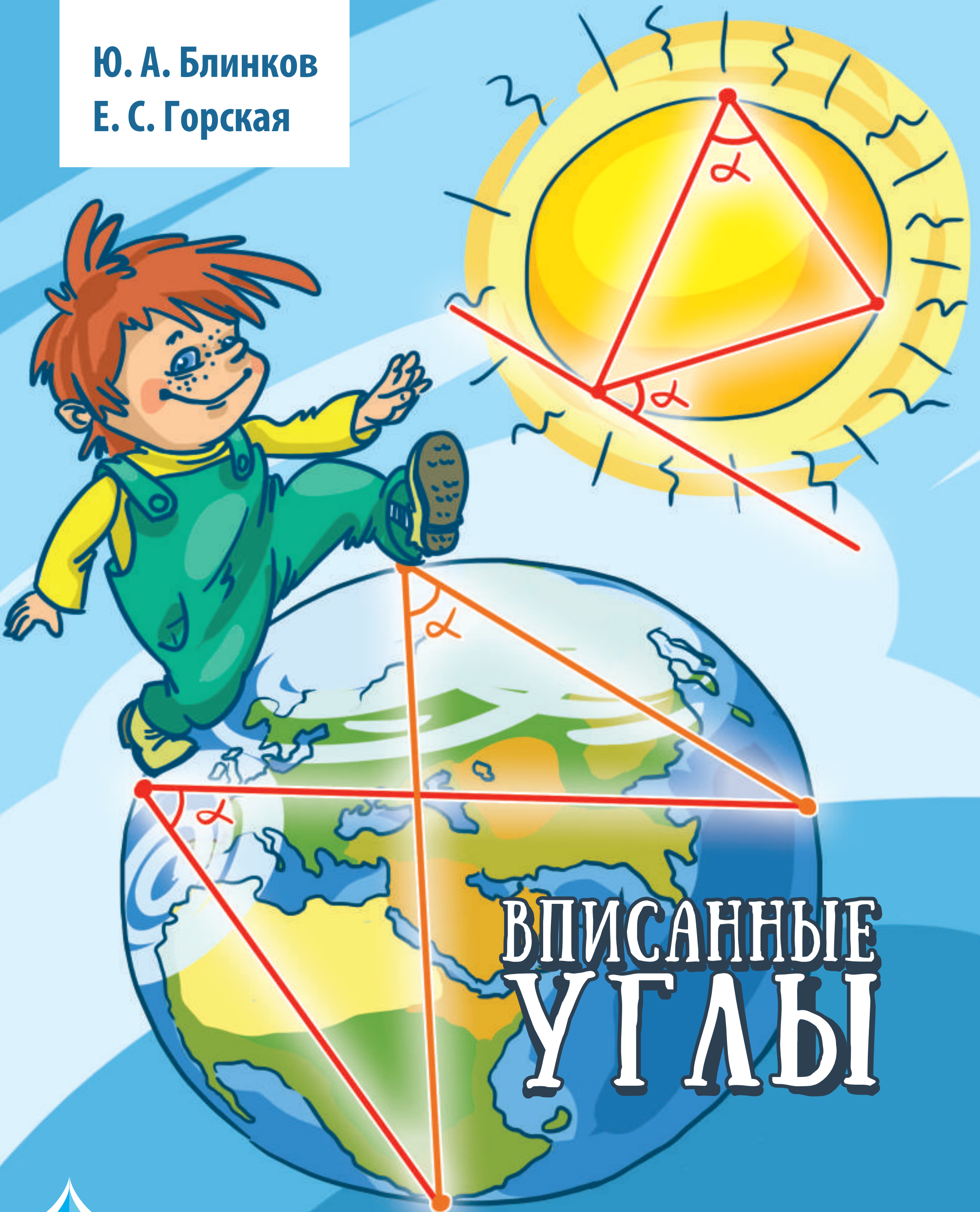
Ю. А. Блинков
Е. С. Горская



Вписанные углы

Школьные
Математические
Кружки

Ю. А. Блинков, Е. С. Горская

Вписанные углы

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков Ю. А., Горская Е. С.
Вписанные углы
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
168 с.
ISBN 978-5-4439-3139-5

Семнадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена геометрическим задачам и конструкциям, связанным со вписанными углами. Книжка предназначена для занятий со школьниками 7–11 классов. В неё вошли разработки десяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. В приложении приведён большой список дополнительных задач различного уровня трудности. Отдельная часть этого раздела посвящена понятию антипараллельности. Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной геометрии.

Подготовлено на основе книги: *Ю. А. Блинков*, *Е. С. Горская*. Вписанные углы. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1139-7.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3139-5

Предисловие

Вписанные углы, по мнению авторов, являются одной из самых интересных тем из курса школьной геометрии. Они предоставляют богатейшие возможности для выявления равенств и соотношений между углами, поднимают на новый уровень работу с ГМТ и задачами на построение.

Отметим, что задачи по этой теме присутствуют в задачниках В. В. Прасолова, И. Ф. Шарыгина, Р. К. Гордина, Я. П. Понарина и др., но на теорию и методические аспекты обучения данной теме обращено, на наш взгляд, недостаточно внимания. В данной книге мы постараемся частично восполнить этот пробел.

В брошюре содержатся: 10 занятий геометрического кружка; приложение, в котором рассматривается важное понятие **антипараллельности**, помогающее при решении многих задач, связанных со вписанными углами; дополнительные задачи и раздаточный материал к каждому занятию.

Каждое занятие книги представляет собой вариант занятия кружка на соответствующую тему и состоит из теоретического материала, комментариев для учителя, примеров задач, которые, на наш взгляд, стоит разобрать в начале кружка, и задач для решения. При этом вопросы о том, разбирать ли теоретический материал, добавлять или убирать задачи, остаются на усмотрение учителя. Некоторые занятия по объёму материала достаточно велики, и, возможно, удобно будет их разбить на несколько занятий кружка. Мы этого не делали, чтобы сохранить целостность подачи материала.

Отметим, что в книге содержатся занятия двух типов.

Первый тип — занятия на определённый факт или метод. К ним относятся занятия 1, 2, 3, 4, 5 и 7. Второй тип занятий — на определённую геометрическую конструкцию. К ним относятся занятия 6, 8–10. Отметим, что, по мнению авторов, после того как учащиеся овладели основными методами и фактами, полезно показывать их применение в различных геометрических конструкциях.

Также полезно предлагать учащимся «серии» задач, в которых в одной геометрической конструкции из одной задачи следует другая, постепенно усложняя уровень задач. Примерами подобных занятий можно считать занятия 9 («Две окружности») и 10 («точка Микеля»).

В конце занятия приведён список задач, которые также можно использовать на занятии (из раздела «Дополнительные задачи»). При этом одна и та же задача может быть указана в разных занятиях. В некоторых случаях это означает, что её решение может потребовать знания материала из нескольких занятий. Для того чтобы облегчить выбор учителю, в конце книги приведён рубрикатор задач, в котором про каждую дополнительную задачу указано, к каким занятиям её можно отнести.

Более того, возвращаться к одной и той же задаче в различных геометрических конструкциях авторы считают полезным для закрепления и глубокого понимания материала.

Мы включили в этот раздел много несложных задач, поскольку одной из целей брошюры является возможность обучения данной теме «с нуля».

Те же, кто более опытен, также могут найти себе задачи по уровню. Некоторые задачи весьма трудны и взяты из материалов олимпиад самого высокого уровня. Наиболее, на наш взгляд, сложные задачи отмечены знаком «*».

Отметим также, что некоторые задачи можно решать и без использования вписанных углов, но исходя из тематики данной книги мы эти решения не приводим.

К дополнительным задачам мы приводим только указания, причём в основном это не краткие решения, а комментарий, с какой геометрической конструкцией связана данная задача и какие факты из занятий можно применить.

Если материал из соответствующего занятия усвоен, то этого должно хватить для того, чтобы довести решение до конца. Если не получается — ничего страшного, можно ещё раз вернуться к занятию на эту тему, а задачу порешать позже.

Полные же решения почти всех задач можно легко найти на сайте `problems.ru`.

В рамках данной книги мы решили ограничиться десятью занятиями, однако если использовать дополнительные задачи, то можно провести ещё несколько занятий, например: «Угол между радиусом и стороной», «Середины дуг», «Ортоцентр и угол 60°», «Вписанный четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями», «Прямая Симсона в задачах».

Отметим также, что в решениях задач мы не используем ориентированные углы, так как наша книга адресована широкому кругу читателей и мы готовы пожертвовать строгостью ради большей доступности изложения. Тем не менее, в некоторых задачах мы упоминаем про другие случаи расположения точек и приводим соответствующие рисунки, предлагая восстановить доказательство для этого случая (см. например, занятие 9).

Некоторые «классические» вещи не вошли в эту книгу. Например, свойства прямой Уоллеса–Симсона и задачи, связанные с ней, заслуживают отдельного занятия (возможно, и не одного). То же самое относится к окружностям Эйлера, Конвея и Тейлора, о которых мы упоминаем «вскользь». Задачи на эти темы и более подробное исследование даных объектов можно найти в задачнике В. В. Прасолова и в статьях на сайте `geometry.ru`.

Наша же цель была не пытаться объять всё, а подробно разобрать основные факты и идеи, которые встречаются при решении классических задач. Тем же обусловлен и выбор задач для самостоятельного решения (дополнительных задач).

Многие занятия данной книги возникли в результате обсуждений, обмена мнениями и материалами с А. Д. Блинковым, Д. В. Прокопенко, Д. В. Швецовым, за что авторы им очень благодарны.

Более того, часть задач на темы «Угол между радиусом и стороной» и «Прямая Симсона в задачах» были взяты из соответствующих занятий Д. Швецова, идея рассмотрения конструкции из двух окружностей (занятие 9) предложена Д. В. Прокопенко, а некоторые задачи на вспомогательную окружность (занятие 4) — А. Д. Блинковым.

Отдельная большая благодарность — А. В. Шаповалову и А. Д. Блинкову за полезные обсуждения, внимательное прочтение книги и исправление ошибок и опечаток.

Мы не приводим авторов задач, за что заранее просим извинить. В большинстве случаев это задачи, давно ставшие классикой, и задачи олимпиад различного уровня, которые нам нравятся и соответствуют целям и задачам этой брошюры.

Занятие 1

Вписанный угол, опирающийся на диаметр

Занятие рассчитано на учеников 7–8 классов. Рекомендуется его проводить после того, как учащиеся будут иметь представление об окружности, описанной около треугольника, и основных геометрических местах точек (сокращённо ГМТ). К задачам на данную тему рекомендуется возвращаться и позже (см. задачи для самостоятельного решения).

Вспомним следующие утверждения.

1. Свойство и признак прямоугольного треугольника.

а) В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.
б) Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

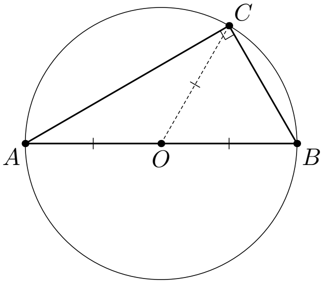


Рис. 1.1

Мы не приводим доказательства данных фактов, так как они входят в школьную программу.

2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр. Расположение центра описанной окружности прямоугольного треугольника.

а) Вписанный прямой угол опирается на диаметр.

б) Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

в) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

Комментарий. Утверждение 2а следует из 1а, утверждение 2б следует из 1б, утверждение 2в следует из 2а (см. рис. 1.1).

Отметим, что на данном этапе нецелесообразно вводить чёткое определение вписанного угла. Это можно сделать позже (см. занятие 2). Пока что, на наш взгляд, хватит наглядного представления.

Полезно обсудить с учениками, как формулируются данные утверждения, используя слова «если ..., то ...», какое из утверждений является свойством, а какое — признаком и т. д.

3. ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, является окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, исключая точки A и B.

Комментарий. Утверждение следует из утверждений 2а и 2б.

Отметим, что понятие ГМТ является ключевым при решении задач на вписанные углы.

Отметим также, что утверждение 3 нам позволит, в том числе, доказывать принадлежность четырёх точек одной окружности.

Пример 1.1. Нарисована окружность с неотмеченным центром. Восстановите его при помощи чертёжного угольника.

Решение. Воспользуемся тем, что вписанный в окружность прямой угол опирается на диаметр (утверждение 2а).

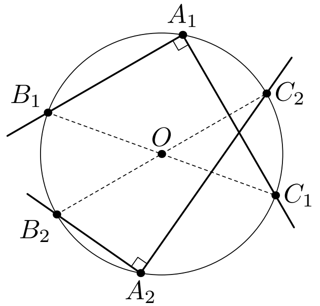


Рис. 1.2

Расположим угольник так, чтобы вершина прямого угла находилась на окружности, а стороны пересекали окружность (см. рис. 1.2), причём сделаем это дважды. Пусть A_1 и A_2 — вершины прямых углов, а B_1, C_1, B_2 и C_2 — точки пересечения сторон угольника с окружностью. Поскольку $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2 = 90^\circ$, отрезки B_1C_1 и B_2C_2 — диаметры окружности, следовательно, точка их пересечения — центр окружности.

Обратите внимание на то, что мы воспользовались не определением центра, а тем, что он принадлежит диаметру окружности, и получили центр как *пересечение множеств.*

Пример 1.2. Пусть AB — диаметр окружности. Докажите, что если точка M лежит внутри окружности, то угол AMB тупой, а если вне — острый.

Перед разбором доказательства можно задать школьникам вопрос: а почему этот угол не может быть прямым?

Решение. Пусть точка M_1 лежит внутри окружности (см. рис. 1.3), а луч AM_1 пересекает окружность в точке M. Тогда из утверждения 2б следует, что $\angle AMB = 90^\circ$ (опирается на диаметр), а угол AM_1B — внешний в треугольнике BMM_1. Следовательно, $\angle AM_1B = \angle AMB + \angle MBM_1 > \angle AMB = 90^\circ$.

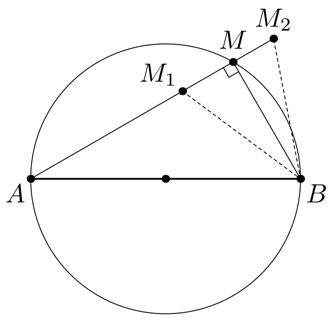


Рис. 1.3

Пусть теперь точка M_2 лежит вне окружности, а M — точка пересечения окружности и отрезка AM_2. Тогда угол AMB внешний в треугольнике BM_2M, следовательно, $\angle AMB = \angle AM_2B + \angle M_2BM$, откуда $\angle AM_2B < \angle AMB = 90^\circ$.

Стоит обратить внимание учащихся на доказанное утверждение. В дальнейшем оно нам пригодится (см. занятие 4).

Заметим, что верно и обратное утверждение, которое можно доказать методом от противного.

Можно обратить внимание на то, что мы доказали утверждение для угла с вершиной в *любой* точке, сравнив его со *специально построенным* прямым углом. Окружность дала нам возможность выбора *удобного* прямого угла из *многих возможных*.

Пример 1.3. В треугольнике ABC проведены прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1, H — точка пересечения этих прямых[1]. Докажите, что:

а) точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности;

б) точки C, H, A_1 и B_1 лежат на одной окружности.

Решение. Пусть треугольник ABC остроугольный (см. рис. 1.4а). Воспользуемся утверждением 3. Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$, точки B_1 и A_1 принадлежат окружности, построенной на AB как на диаметре. Аналогично, точки B_1 и A_1 принадлежат окружности, построенной на отрезке CH как на диаметре.

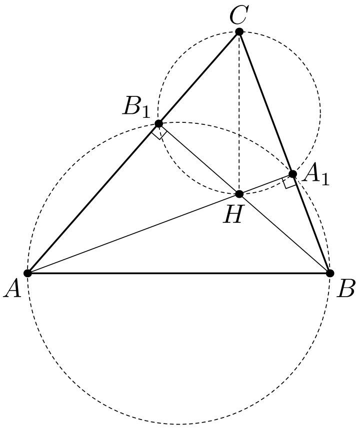


Рис. 1.4а

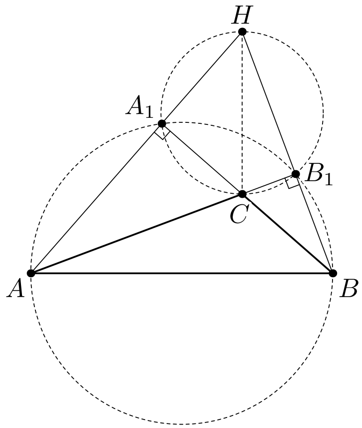


Рис. 1.4б

Случай, когда угол C тупой, рассматривается аналогично, при этом точки C и H, а также точки A_1 и B_1 меняются местами (см. рис. 1.4б).

Можно было также воспользоваться утверждением 2в и доказать, что описанные окружности двух треугольников совпадают (например, для треугольников AB_1B и AA_1B).

[1]Точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) называется *ортоцентром* этого треугольника

Случай, когда тупым является угол A или B, рассмотрите самостоятельно.

Отметим, что в задачах, связанных с высотами треугольника, возможны различные случаи. Насколько подробно их разбирать и в какой момент обратить на них внимание учеников — выбор учителя.

Пример 1.4. На окружности отмечена точка. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

Решение. Пусть O — центр окружности, A — данная точка (см. рис. 1.5). Рассмотрим произвольную (отличную от диаметра) хорду AB. Точка M является её серединой тогда и только тогда, когда $\angle AMO = 90^\circ$. Воспользовавшись утверждением 3, получаем, что геометрическое место точек M есть окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре, исключая точку A.

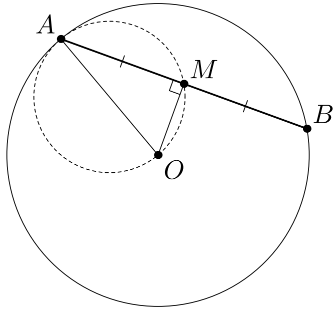


Рис. 1.5

Можно обратить внимание на то, что мы определили рассматриваемое множество точек по-другому, *более удобным* для нас образом.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, расположенную вне окружности.

Задача 1.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

Задача 1.3. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника как на диаметрах, лежит на прямой BC.

Задача 1.4. Даны окружность w и две точки M и K внутри неё. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

Задача 1.5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность w, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Через точку D проведена касательная к окружности. Докажите, что она пересекает катет BC в его середине.

Задача 1.6. Пусть точка O — центр вписанной окружности, а точка O_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AB. Докажите, что точки A, B, O и O_1 лежат на одной окружности.

Задача 1.7. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB (одна в точке A, другая в точке B) и касаются друг друга в точке M. Найдите ГМТ M.

Ответы и решения

Задача 1.1. Пусть O — центр окружности, A — данная точка (см. рис. 1.6).

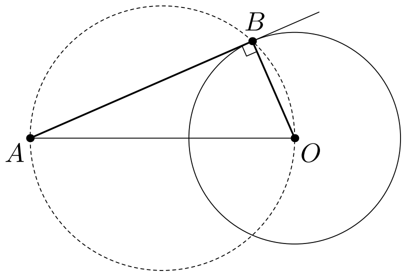


Рис. 1.6

Поскольку касательная перпендикулярна радиусу окружности, точка касания B принадлежит геометрическому месту точек, из которых отрезок AO виден под прямым углом, то есть окружности, построенной на AO как на диаметре (утверждение 3). С другой стороны, точка B должна принадлежать данной окружности. Таким образом, B есть точка пересечения этих окружностей.

Стоит обратить внимание школьников на то, что задача имеет два решения.

Отметим, что данная задача предназначена скорее для урока, чем для кружка. Тем не менее, напомнить о методе построения касательной полезно и с точки зрения дальнейшего изучения материала.

Задача 1.2. Пусть ABC — искомый прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$, см. рис. 1.7).

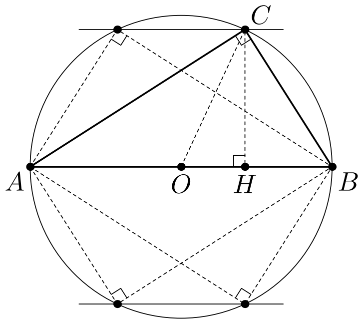


Рис. 1.7

Согласно утверждению 3 ГМТ C есть окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре (исключая точки A и B). С другой стороны, все такие точки C удалены от отрезка AB на одно и то же расстояние, равное высоте треугольника. Таким образом, вершина C есть одна из точек пересечения прямой, параллельной AB и отстоящей от неё на расстояние, равное высоте, и окружности, построенной на AB как на диаметре.

Отметим, что, в отличие от предыдущей, эта задача имеет не более одного решения.

Заметим также, что можно было использовать утверждение 1а и метод вспомогательного треугольника (вначале построить треугольник COH, см. рис. 1.7).

Задача 1.3. *Первый способ.* Обозначим окружности, построенные на AB и AC, через w_1 и w_2. Пусть P — точка пересечения w_1 и w_2, отличная от точки A (см. рис. 1.8). Поскольку AB и AC — диаметры окружностей, то $\angle APB = 90^\circ$ и $\angle APC = 90^\circ$, следовательно, прямые PB и PC совпадают, то есть точки P, B и C лежат на одной прямой.

Второй способ. Обозначим через P основание высоты треугольника, опущенной из вершины A. Из точки P оба отрезка AB и AC видны под прямым углом, поэтому P лежит на обеих построенных окружностях.

Второе решение использует приём, называемый *подменой объекта*: вместо искомой точки мы используем точку с *другими* свойствами, для которой нужное утверждение очевидным образом верно. Зато нам придётся доказать, что такая точка является искомой.

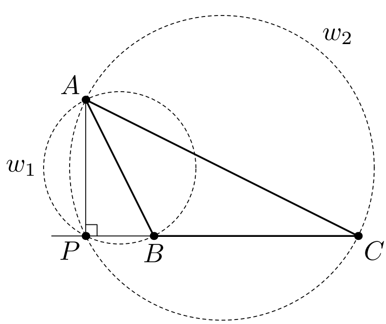


Рис. 1.8

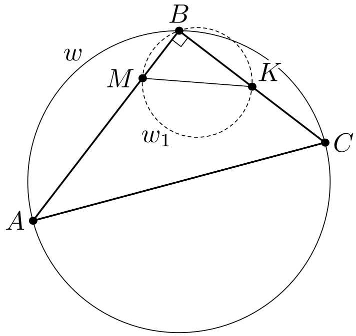


Рис. 1.9

Задача 1.4. Пусть ABC — искомый треугольник (см. рис. 1.9). Поскольку $\angle MBK = 90^\circ$, точка B принадлежит окружности w_1, построенной на отрезке MK как на диаметре (утверждение 3). Таким образом, точка B — любая точка пересечения окружностей w и w_1. Дальнейшее построение очевидно.

Количество решений зависит от количества точек пересечения окружностей.

Отметим, что достаточно построить любую из вершин искомого треугольника, дальнейшее построение однозначно. При этом удобно искать вершину прямого угла, она связана с условием: из неё отрезок MK виден под прямым углом.

Задача 1.5. Пусть K — точка пересечения касательной и отрезка BC (см. рис. 1.10). Из утверждения 2б следует, что $\angle ADC = 90^\circ$. Поскольку BC также является касательной к w, то $KC = KD$. Таким образом, точка K лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника CBD и равноудалена от вершин C и D. Следовательно, точка K является центром описанной окружности треугольника CBD, то есть серединой отрезка BC.

Можно также доказать равенство $KD = KB$, посчитав углы в треугольнике KBD.

При желании можно обсудить со школьниками, а почему касательная вообще пересекает катет BC.

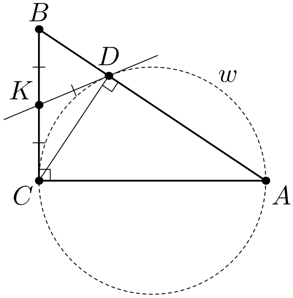


Рис. 1.10

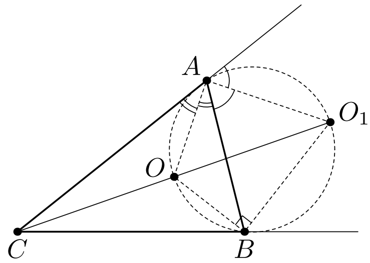


Рис. 1.11

Задача 1.6. Поскольку AO и AO_1 — биссектрисы смежных углов (см. рис. 1.11), то $\angle OAO_1 = 90^\circ$. Аналогично, $\angle OBO_1 = 90^\circ$, то есть точки A, B, O и O_1 лежат на одной окружности (утверждение 3).

Эта окружность нам ещё неоднократно встретится. В частности, в занятии 6 мы будем подробно рассматривать конструкцию, связанную с её центром.

Задача 1.7. Ответ: окружность, построенная на AB как на диаметре, исключая точки A и B.

Проведём через точку M общую касательную l к данным окружностям (см. рис. 1.12). Пусть D — точка пересечения l и AB. Тогда $DA = DM$ и $DM = DB$, следовательно, точка M удалена от точки D на фиксированное расстояние, то есть лежит на окружности с диаметром AB.

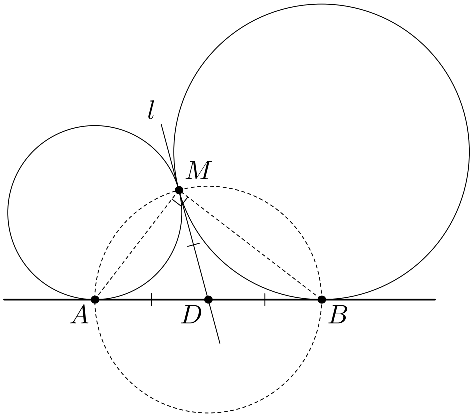


Рис. 1.12

Осталось показать, что любая точка этой окружности (не совпадающая с A и B) удовлетворяет условию. Действительно, если $DM = DA = DB$, то мы можем вписать касающиеся в точке M окружности в углы MDB и MDA.

Можно также использовать задачи Д1–Д11, Д36, Д106–Д107.

Занятие 2

Теорема о вписанном угле

Занятие ориентировано на учеников 8 класса. В некоторых учебных пособиях понятие вписанного угла и соответствующие утверждения рассматриваются позже. На наш взгляд, работать со вписанными углами можно с начала 8 класса, при изучении темы «Четырёхугольники». Тогда, постепенно привыкая к данной конструкции и утверждениям, с ней связанными, ученики в середине или конце 8 класса уже смогут решать некоторые, даже иногда непростые, задачи.

Перед началом занятия рекомендуем обсудить с учащимися перечисленные ниже утверждения. Отметим, что, как и в первом занятии, теоремы и следствия из них в большинстве случаев мы приводим без доказательств, так как они содержатся в стандартных школьных учебниках.

1. Рассмотрим произвольный угол ABC и дугу окружности, которая пересекает его стороны (см. рис. 2.1).

Если концы дуги лежат на сторонах угла, а её внутренние точки — между сторонами угла, то говорят, что угол «*опирается*» на дугу.

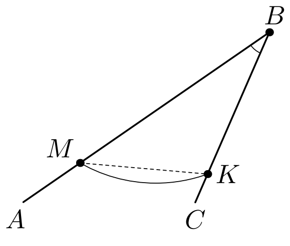


Рис. 2.1

Про хорду, соединяющую концы дуги, говорят, что она «*стягивает*» эту дугу.

Если $\angle ABC = \alpha$, то говорят, что хорда MK «*видна*» из точки B под углом α.

Определения.

1. Угол называется *вписанным* в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

2. Угол называется *центральным*, если его вершиной является центр окружности.

При желании можно предложить школьникам следующее упражнение.

Упражнение. Верно ли такое определение вписанного угла: угол называется вписанным в окружность, если имеет с ней ровно три общие точки?

Ответ: нет, неверно. Например, можно рассмотреть угол, одна из сторон которого пересекает окружность, а другая — касается.

2. Теорема. Угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

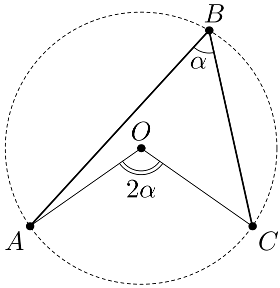


Рис. 2.2а

Отметим, что исходя из формулировки теоремы утверждение рассматривается для вписанных углов, не являющихся тупыми. Позднее, начиная с занятия 7, мы начнём его использовать и для тупых вписанных углов. Пока же работать же с тупыми вписанными углами школьники смогут, используя следствия 3 и 4.

Следствия.

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Формально говоря, следствие 1 пока что доказано только для острых вписанных углов, то есть опирающихся на ту же дугу, что и центральный угол AOC, см. рис. 2.2а. Завершить доказательство для тупых углов можно после того, как доказано следствие 3.

2. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, являются прямыми.

3. Сумма вписанных углов, опирающихся на дуги, дополняющие друг друга до окружности, равна 180°.

Пусть углы ABC и AB_1C вписаны в окружность и опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности (см. рис. 2.2б), а точки B и O лежат в разных полуплоскостях относительно AC. Проведём диаметр BB_2. Тогда $\angle B_2AB = \angle B_2CB = 90^\circ$ (следствие 2). Используя теорему о сумме углов четырёхугольника, получим, что $\angle AB_2C = 180^\circ - \angle ABC$. Теперь для завершения доказательства достаточно воспользоваться следствием 1 для острых углов AB_2C и AB_1C (углы острые, поскольку опираются на одну дугу с центральным углом AOC).

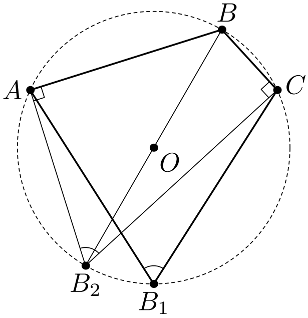


Рис. 2.2б

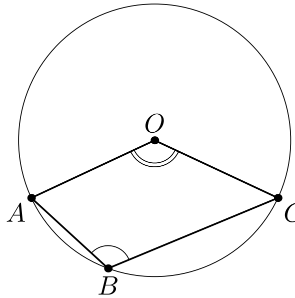


Рис. 2.2в

Отметим, что теперь следствие 1 доказано и для тупых вписанных углов, так как они дополняют равные острые углы до 180°.

Заметим также, что на самом деле доказано **свойство** вписанного четырёхугольника: если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°. Подробный разговор о свойствах и признаках вписанного четырёхугольника мы отложим до занятия 3.

4. Если вписанный и центральный угол опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, то вписанный дополняет половину центрального до 180°, то есть $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC$ (см. рис. 2.2в).

5. Пусть ABC — угол, вписанный в окружность с центром O. Этот угол острый тогда и только тогда, когда точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно пря-

мой AC, и тупой тогда и только тогда, когда они лежат в разных полуплоскостях (см. рис. 2.2а, в).

Отметим, что если рассматривать любые центральные углы, в том числе и бо́льшие 180°, то доказательство некоторых утверждений может быть упрощено. Например, следствие 3 может быть получено напрямую из теоремы о вписанном угле. Также при этом подходе можно следствие 4 отдельно не формулировать.

Тем не менее, при данном подходе у учителя могут возникнуть следующие проблемы:

1) рассмотрение угла, большего 180°, может вызвать у учащихся некоторые затруднения, поскольку ранее они с такими углами не сталкивались;

2) формулировки некоторых утверждений нуждаются в дополнительных объяснениях или корректировке, например, не совсем понятно, какие точки лежат между сторонами угла, большего 180°, а значит, понятие «угол опирается на дугу» требует дополнительного объяснения;

3) угол требует других обозначений, так как центральных углов AOC становится два, то есть, в некоторых случаях придётся уточнять, какой из углов имеется в виду. Например, когда мы говорили о том, что хорда видна из точки под определённым углом.

Эти проблемы могут быть частично решены, если ввести понятие угла как части плоскости (плоского угла). Но в начале 8 класса это может оказаться преждевременным, исходя из определения угла, к которому учащиеся привыкли с 7 класса.

Исходя из вышеизложенного мы выбрали путь, не использующий углов, бо́льших 180°. При этом в задачах мы будем приводить указания на то, как может упроститься решение, если использовать иной подход.

Какой подход выбрать на своих занятиях, каждый учитель может решить сам исходя из уровня и готовности учеников. В этой брошюре мы выбрали путь «от частного к общему», но можно выбирать и путь «от общего к частному», если школьники к нему готовы.

По нашим наблюдениям, в теме «Вписанные углы» и так достаточно проблем с понятиями, формулировками и применением доказанных фактов, поэтому более общий подход может в начале 8 класса оказаться сложным. Однако позднее без обобщения, разумеется, не обойтись, как и без понятия угловой меры дуги. Об этом мы будем говорить в занятии 7.

Пример 2.1. На окружности отмечены четыре точки A, B, C и D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α?

Ответ: α или $180^\circ - \alpha$.

Решение. Возможны два случая расположения точек: C и D находятся в в разных полуплоскостях относительно прямой AC (см. рис. 2.3а) или в одной полуплоскости (см. рис. 2.3б).

В первом случае углы ABC и ADC опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности, поэтому $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Во втором случае рассматриваемые углы опираются на одну и ту же дугу AC, откуда $\angle ADC = \angle ABC = \alpha$.

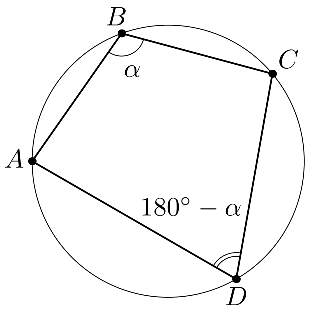


Рис. 2.3а

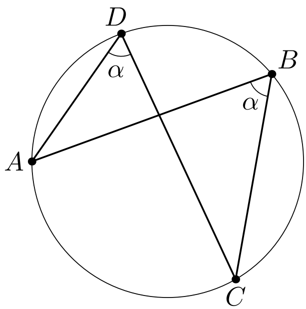


Рис. 2.3б

Пример 2.2. Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол 150°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Ответ: 10 см.

Решение. Пусть дан треугольник ABC, сторона AC которого равна 10 см. Рассмотрим окружность с центром O, описанную вокруг этого треугольника (см. рис. 2.4). Согласно следствию 4, $\frac{1}{2}\angle AOC + \angle ABC = 180^\circ$, откуда $\angle AOC = 60^\circ$. Треугольник AOC равнобедренный с углом 60° при вершине, следовательно, равносторонний. Таким образом, радиус окружности равен длине стороны AC, то есть 10 см.

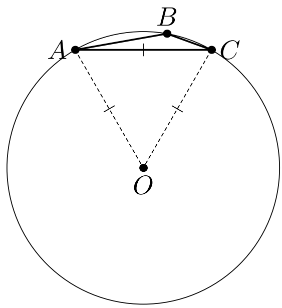


Рис. 2.4

Заметим, что школьники, знакомые с теоремой синусов, могут решить эту задачу и по-другому. Тем не менее, эта задача является полезным упражнением на вписанные углы.

Отметим также, что при возникновении центрального угла в 60° образуется равносторонний треугольник, то есть хорда равна радиусу окружности.

Пример 2.3. Хорды окружности AC и BD пересекаются, точки M, N и K — середины хорд AB, BC и CD соответственно. Докажите, что угол BMN равен углу NKC.

Решение. Проведём отрезки AC и BD (см. рис. 2.5). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$, как опирающиеся на одну дугу. Кроме того, в треугольниках ABC и BCD отрезки MN и NK являются средними линиями. Следовательно, $\angle BMN = \angle BAC$ и $\angle NKC = \angle BDC$, откуда следует утверждение задачи.

Заметим, что здесь нужное равенство доказывается не напрямую, а через *посредников* — дополнительно построенные вписанные углы.

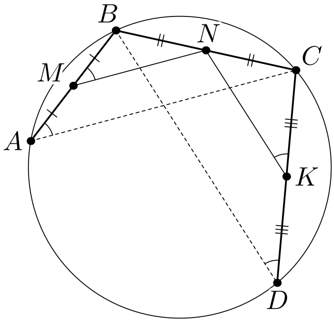


Рис. 2.5

Пример 2.4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что угол CA_1B_1 равен углу CAB.

Отметим, что эта конструкция нам уже встречалась в занятии 1.

Решение. Поскольку $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90^\circ$, то четырёхугольник AB_1A_1B вписанный (см. рис. 2.6). Поэтому по следствию 3, $\angle B_1AB + \angle B_1A_1B = 180^\circ$. Тогда $\angle CAB = 180^\circ - \angle B_1A_1B = \angle CA_1B_1$.

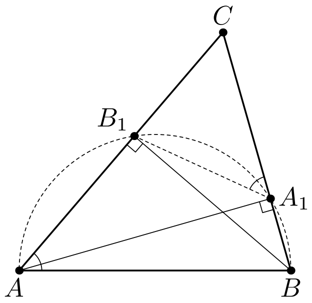


Рис. 2.6

Отрезки B_1A_1 и AB антипараллельны относительно прямых CA и CB (подробнее см. приложение).

К данному занятию мы предлагаем больше задач для самостоятельного решения, чем реально может вместить занятие кружка. Делается это исходя из того, что это занятие может проводиться как для тех, кто до этого со вписанными углами не сталкивался, так и для более опытных школьников. В первом случае мы предлагаем учителю ограничиться задачами 2.1–2.5 и 2.7, во втором случае вместо некоторых из них можно использовать задачи с более сложными идеями и конструкциями: 2.6, 2.8, 2.9, 2.10. Отдельно стоит упомянуть о задаче 2.7 — она является ключевой и будет использоваться при дальнейшем изучении материала, поэтому если она не вмещается в кружок, то её стоит обсудить с учениками отдельно и рассмотреть в качестве примера её применения задачу 2.8 или одну из дополнительных задач.

Также при желании учителя, используя задачи для самостоятельного решения (и, возможно, некоторые дополнительные задачи), можно сделать два занятия кружка на эту тему.

Задачи для самостоятельного решения

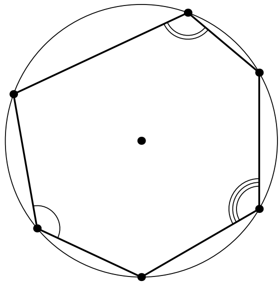
Задача 2.1. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ADB равен 80°. Найдите угол CAB.

Задача 2.2. Точки A, B и C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности?

Задача 2.3. В окружность вписаны два угла: ACB и $A_1C_1B_1$. Докажите, что если они равны, то $AB = A_1B_1$. Верно ли обратное утверждение?

Задача 2.4. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, $\angle A = \alpha$. Найдите угол CBO.

Задача 2.5. Шестиугольник вписан в окружность. Найдите сумму углов при трёх его не соседних вершинах (см. рисунок).



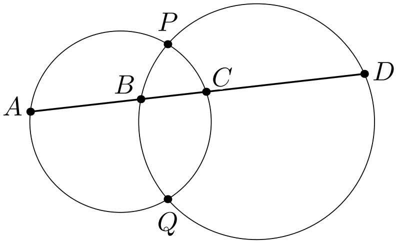
Задача 2.6. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность треугольник с двумя данными углами.

Задача 2.7. Пусть AB — хорда окружности, C — любая точка этой окружности, M лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и C. Докажите, что если точка M лежит внутри окружности, то угол AMB больше угла ACB, а если вне окружности, то меньше.

Задача 2.8. На окружности зафиксированы точки A и B, а точка C движется по одной из дуг AB. По какой траектории движется центр вписанной окружности треугольника ABC?

Задача 2.9. На хорде AB окружности с центром O взята точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

Задача 2.10. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D (см. рисунок). Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.



Ответы и решения

Задача 2.1. Ответ: 50°.

Первый способ. Заметим, что $\angle ACB = \angle ADB = 80^\circ$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу (см. рис. 2.7). Тогда $\angle CAB = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 50^\circ$.

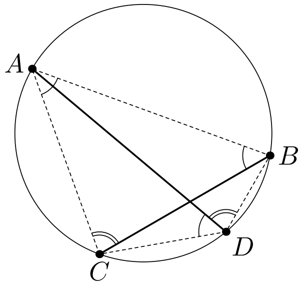


Рис. 2.7

Второй способ. Заметим, что $\angle ADC = \angle ABC = 50^\circ$, как вписанные, опирающиеся на одну дугу (см. рис. 2.7). Следовательно, $\angle BDC = 80^\circ + 50^\circ = 130^\circ$. Тогда по следствию 3 получим, что $\angle CAB = 180^\circ - \angle BDC = 50^\circ$.

Равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, позволяет «перекидывать» известные углы, чтобы собрать их в одной сумме.

Задача 2.2. Ответ: 30° или 150°.

Поскольку хорда AC равна радиусу окружности, треугольник AOC равносторонний. Возможны два случая: точки B и O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC (см. рис. 2.8а) или в разных полуплоскостях (см. рис. 2.8б). В первом случае $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 30^\circ$. Во втором случае по следствию 4, $\angle ABC + \frac{1}{2}\angle AOC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = 150^\circ$.

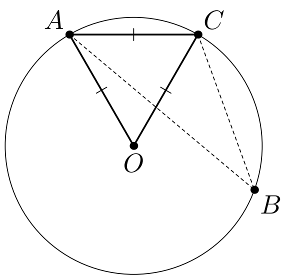


Рис. 2.8а

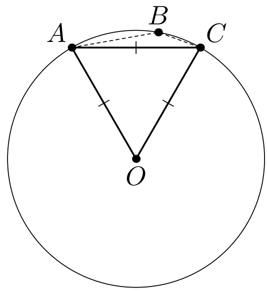


Рис. 2.8б

Задача 2.3. Пусть равны острые вписанные углы ACB и $A_1C_1B_1$ (или тупые углы $AC'B$ и AC'_1B, см. рис. 2.9а). Тогда равны центральные углы AOB и A_1OB_1. Для доказательства достаточно воспользоваться в первом случае теоремой о вписанном угле, а во втором — следствием 4. Следовательно, равны равнобедренные треугольники AOB и A_1OB_1, из чего и следует равенство хорд AB и A_1B_1.

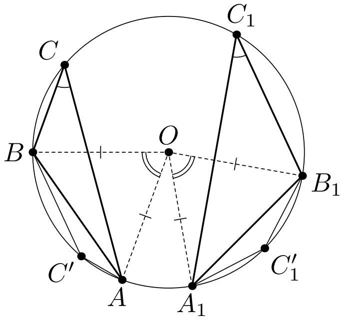


Рис. 2.9а

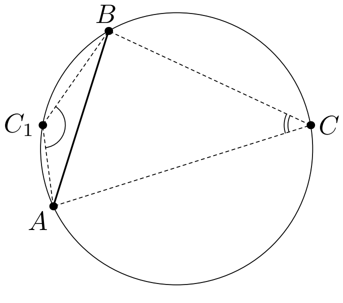


Рис. 2.9б

Обратное утверждение неверно: достаточно рассмотреть два угла, опирающиеся на дуги, дополняющие друг друга до окружности (см. рис. 2.9б).

Можно также обсудить не только равенство хорд, но и равенство соответствующих дуг. Но для этого учащиеся должны иметь представление об угловой мере дуги и понимать, какие дуги считаются равными. Однако введение угловой меры дуги в начале 8 класса может вызвать затруднения, поскольку с длиной дуги школьники ещё толком не работали. Обсуждение же равенства дуг, на наш взгляд, будет наиболее естественным после изучения темы «Движения на плоскости». Об этом мы ещё поговорим в занятии 7.

Задача 2.4. Ответ: $90^\circ - \alpha$ или $\alpha - 90^\circ$.

В случае острого угла α центральный угол BOC опирается на ту же дугу и равен 2α (см. рис. 2.10а). Из равнобедренного треугольника BOC находим, что $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$.

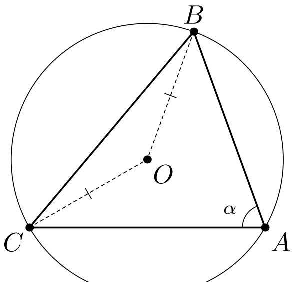


Рис. 2.10а

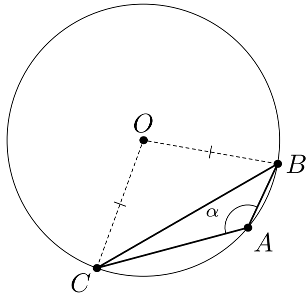


Рис. 2.10б

В случае тупого угла α центральный угол BOC и вписанный угол BAC опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности (см. рис. 2.10б). По следствию 4 $\angle BOC = 360^\circ - 2\alpha$. Следовательно, $\angle CBO = \alpha - 90^\circ$.

Это утверждение мы в дальнейшем будем называть «угол между радиусом и стороной». В частности, оно нам пригодится при решении некоторых задач и в занятии 8.

Задача 2.5. Рассмотрим вписанный четырёхугольник $ACDE$ (см. рис. 2.11). По следствию 3, $\angle CDE = 180^\circ - \angle CAE$. Аналогично, $\angle ABC = 180^\circ - \angle AEC$ и $\angle AFE = 180^\circ - \angle ACE$. Сложив эти равенства и учитывая сумму углов треугольника ACE, получим, что $\angle ABC + \angle CDE + \angle AFE = 360^\circ$.

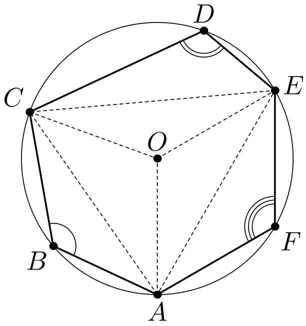


Рис. 2.11

Отметим, что если в задаче предлагается конкретное расположение точек: центр окружности лежит внутри шестиугольника, а отмеченные углы тупые, то возможен и следующий способ решения.

Поскольку вписанные и центральные углы опираются на дуги, дополняющие друг друга до окружности (см. рис. 2.11), по следствию 4:

$$\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle COE,$$

$$\angle AFE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOE.$$

Сложив эти равенства, получим, что $\angle ABC + \angle CDE + \angle AFE = 360^\circ$.

Выбор того, как трактовать условие (с данным рисунком или в общем случае), остаётся на усмотрение учителя. При этом если в общем случае использовать в решении теорему о вписанном угле и следствие 4, то надо аккуратно рассматривать случаи, когда какие-то из отмеченных углов острые, и не забыть случай, когда центр окружности лежит вне шестиугольника. Обсуждение такого решения (в том числе и с «провокацией» со стороны учителя) в какой-то момент может оказаться полезным.

Если же использовать центральные углы, бóльшие 180°, или подсчёт дуг, то, разумеется, случаи рассматривать не надо.

Также можно обратить внимание учеников на *симметричность* условия.

Задача 2.6. Мы можем считать, что в задаче даны все три угла треугольника. Пусть нам известны острые углы α и β треугольника. Воспользуемся тем, что вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу.

Возьмём на окружности произвольную точку B и построим точки C и A так, что $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle COA = 2\beta$ и точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно OC (см. рис. 2.12а, б). Тогда треугольник ABC искомый.

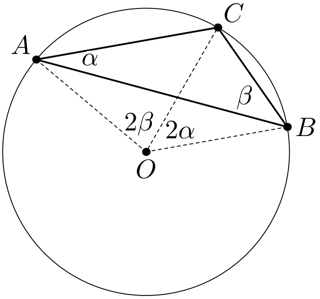


Рис. 2.12а

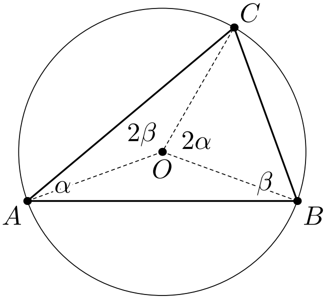


Рис. 2.12б

Отметим, что построение не зависит от вида треугольника.

Если учащиеся используют центральные углы, бóльшие 180°, и знакомы с определением градусной меры дуги, то с ними можно обсудить, что в реальности мы делим окружность на три дуги величинами 2α, 2β и 2γ.

Задача 2.7. Пусть точка M_1 лежит внутри окружности (см. рис. 2.13), а луч BM_1 пересекает окружность в точке M. Тогда $\angle AMB = \angle ACB$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу), а угол AM_1B внешний в треугольнике AMM_1. Следовательно, $\angle AM_1B = \angle AMB + \angle MAM_1 > \angle AMB = \angle ACB$.

Пусть теперь точка M_2 лежит вне окружности, а M — точка пересечения окружности и отрезка BM_2. Тогда угол AMB внешний в треугольнике AM_2M, следовательно, $\angle AMB = \angle AM_2B + \angle M_2AM$, откуда $\angle AM_2B < \angle AMB = \angle ACB$.

Заметим, что эта задача является обобщением примера 1.2.

Верно и обратное утверждение. Проще всего его доказать методом от противного.

Обратите внимание на то, что, как и в примере 1.2, сравнение углов производится не напрямую, а через дополнительно построенный *угол-посредник*, который *опирается на ту же дугу*.

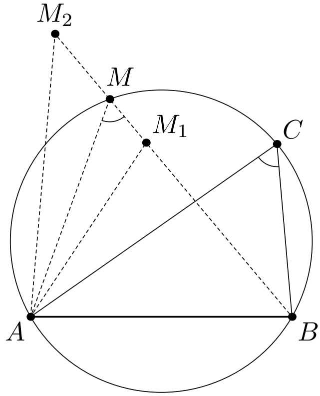


Рис. 2.13

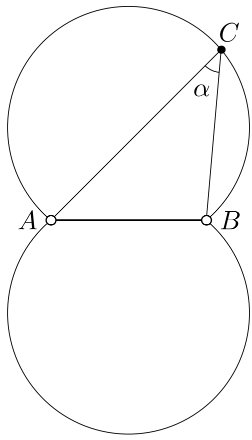


Рис. 2.14

Отметим, что из данной задачи и следствия 1 следует, что

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, является объединение двух симметричных дуг, стягиваемых хордой AB, за исключением точек A и B (см. рис. 2.14).

Данный факт является ключевым при решении многих задач на вписанные углы (см. занятия 3 и 4).

Можно предложить учащимся построить данное ГМТ. Для построения одной из двух симметричных дуг достаточно построить центр окружности, а это, в свою очередь, сводится к построению равнобедренного треугольника по основанию и углу при вершине. Угол же при вершине можно выразить через данный угол α, воспользовавшись теоремой о вписанном угле или следствием 4 в зависимости от α.

Задача 2.8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 2.15). Тогда $\angle AIB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$. Поскольку угол ACB фиксирован, то угол AIB также фиксирован, то есть точка I принадлежит дуге окружности с концами

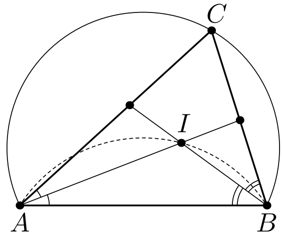


Рис. 2.15

в точках A и B, причём точки C и I лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (точки A и B следует исключить).

Стоит обратить внимание школьников на полезный факт, который мы попутно доказали: угол AIB между биссектрисами углов A и B треугольника ABC равен $90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle C$.

Отметим, что эту задачу можно формулировать и в терминах ГМТ. Тогда потребуется доказать, что любая точка полученной дуги является центром вписанной окружности треугольника ABC для некоторого положения точки C. То есть, по точкам A, B и I восстановить точку C, используя, например, симметрию.

Возможно также решение, использующее «лемму о трезубце» (см. занятие 6), в котором указанной проблемы не возникает. Поэтому к этой задаче (сформулированной в терминах ГМТ) можно ещё раз вернуться позднее, после обсуждения этой леммы.

Отметим также, что окружность, описанная около треугольника AIC, нам уже встречалась в занятии 1 (см. задачу 1.6).

Задача 2.9. Обозначим $\angle ABD = \alpha$. Тогда $\angle AOD = 2\alpha$ (центральный, опирающийся на ту же дугу, см. рис. 2.16). Кроме того, вписанные углы ACD и AOD равны. Таким образом, $\angle ACD = 2\alpha = \angle ABD + \angle BDC$ (как внешний угол в треугольнике CBD). Следовательно, $\angle CDB = \alpha$, и треугольник CBD равнобедренный.

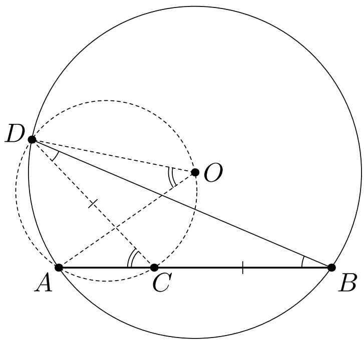


Рис. 2.16

Если в задаче есть две пересекающиеся окружности, стоит посмотреть внимательнее на углы, опирающиеся на дуги с концами в точках пересечения.

Задача 2.10. Проведём отрезок PQ (см. рис. 2.17). Тогда $\angle APQ = \angle ACQ$ и $\angle BPQ = \angle BDQ$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, $\angle APB = \angle APQ - \angle BPQ = \angle ACQ - \angle ADQ = \angle CQD$.

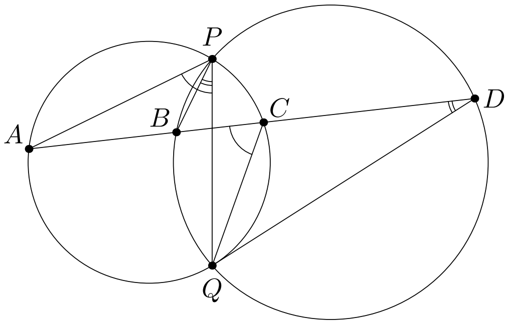


Рис. 2.17

Отметим, что в конструкции с двумя пересекающимся окружностями часто бывает полезно рассмотреть их общую хорду.

Можно также использовать задачи Д12, Д14–Д17, Д66–Д69, Д71, Д75, Д82–Д84, Д101–Д107.

Занятие 3

Вписанный четырёхугольник

Занятие ориентировано на учеников 8 класса.

На данном занятии будут рассмотрены свойства и признаки вписанного четырёхугольника и задачи на их применение.

В соответствии с этим задачи будут двух типов: 1) дано, что четырёхугольник вписанный; 2) это требуется доказать.

Прежде чем говорить о свойствах и признаках вписанного четырёхугольника, рекомендуется вспомнить некоторые факты, связанные с описанной окружностью треугольника.

а) Определение окружности, описанной около треугольника.

б) Теорема о существовании и единственности окружности, описанной около треугольника.

в) Расположение центра описанной окружности треугольника.

Далее можно обсудить, что определение и расположение центра обобщается на любые вписанные многоугольники, а теорема (см. пункт б)) верна не для любых четырёхугольников, то есть нужны какие-то дополнительные условия.

Обсудим ***свойства*** и ***признаки*** вписанного четырёхугольника.

Отметим, что полезно предлагать школьникам различные формулировки вида «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», попутно обсуждая, какое из утверждений является свойством, а какое признаком.

Утверждение 1. Для того чтобы около четырёхугольника можно было описать окружность необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°.

Утверждение 2. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$.

Условие выпуклости нужно, разумеется, не для свойства, а для признака. Если из признака его убрать, то получится неверное утверждение. Контрпример можно построить следующим образом: рассмотрим равносторонний треугольник CBD и его центр A. Тогда в четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны, но он, очевидно, не является вписанным. Подобное обсуждение школьникам может быть полезно.

Заметим, что оба утверждения вытекают из следующего факта, сформулированного на прошлом занятии:

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, является объединение двух симметричных дуг, стягиваемых хордой AB, за исключением точек A и B.

Применив данное утверждение и следствия 1 и 3 из теоремы о вписанном угле (см. занятие 2), получим требуемое.

Также отметим, что понятие ГМТ нам позволяет доказать сразу и свойство и признак!

Заметим, что во вписанном четырёхугольнике отрезки AB и CD антипараллельны относительно прямых BC и AD (аналогично, BC и AD антипараллельны относительно AB и CD).

Точная формулировка свойства и признака вписанного четырёхугольника, использующая понятие антипараллельности, приведена в приложении.

Ещё один признак вписанного четырёхугольника будет сформулирован в занятии 6.

Пример 3.1. Докажите, что трапеция является вписанной тогда и только тогда, когда она равнобокая.

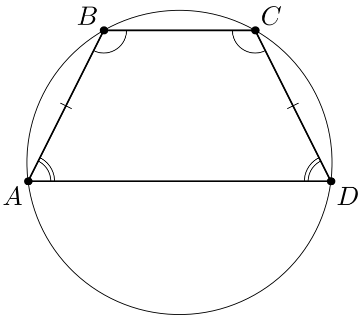


Рис. 3.1

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (см. рис. 3.1). Тогда $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$.

Используя первое утверждение, получим, что трапеция $ABCD$ является вписанной тогда и только тогда, когда $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ (см. утверждение 1). Это равносильно тому, что $\angle ABC = \angle BCD$, то есть трапеция равнобокая.

Отметим, что данная задача является ключевой при изучении вписанных четырёхугольников и будет использоваться в дальнейшем (см. занятие 7).

Полезно также обсудить аналогичные утверждения следующего вида: «параллелограмм является вписанным тогда и только тогда ...»

Пример 3.2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC взяты точки C_2 и B_2 соответственно, причём отрезок BC_2 равен высоте BB_1, а отрезок CB_2 — высоте CC_1. Докажите, что точки B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что $\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACC_1$ (см. рис. 3.2). Следовательно, равны углы при вершинах равнобедренных треугольников BB_1C_2 и CC_1B_2. Поэтому равны и углы при их основаниях, то есть $\angle BC_2B_1 = \angle C_1B_2C$ и четырёхугольник $C_1C_2B_2B_1$ вписанный (см. утверждение 2).

Отметим, что формально мы должны были доказать, что точки B_2 и C_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой B_1C_1. Это можно сделать, например, доказав, что $BB_1 > BC_1$ и $CC_1 > CB_1$. Уровень строгости обоснования таких фактов оставляем на усмотрение учителя.

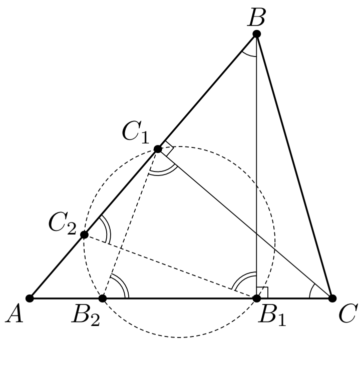


Рис. 3.2

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности, причём центр O окружности расположен внутри четырёхугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle MOL = 180^\circ$.

Задача 3.2. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он — вписанный.

Задача 3.3. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

Задача 3.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AB = BC = CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

Задача 3.5. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне CD — точка L, на отрезке KL — точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC, лежит на диагонали AC.

Задача 3.6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки C', A', B'. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ проходят через одну и ту же точку.

Ответы и решения

Задача 3.1. Поскольку O — центр окружности, то OK, OL, OM и ON — серединные перпендикуляры к сторонам четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 3.3). Тогда, используя теорему о сумме углов четырёхугольника, получим, что $\angle BAD + \angle KON = 180^\circ$ и $\angle BCD + \angle LOM = 180^\circ$. Учитывая, что $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ (утверждение 1), получим требуемое.

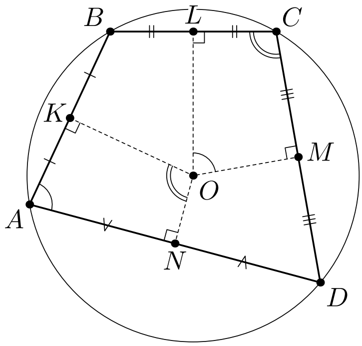


Рис. 3.3

Отметим, что в этой задаче используется то, что центр описанной окружности лежит на серединных перпендикулярах к сторонам. Этот простой факт неоднократно обсуждается со школьниками, что не мешает некоторым из них его игнорировать....

Задача 3.2. Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырёхугольник, $KLMN$ — четырёхугольник, образованный точками пересечения биссектрис углов $ABCD$ (см. рис. 3.4).

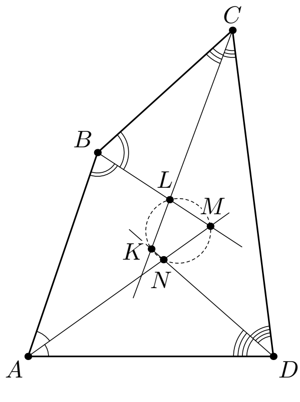


Рис. 3.4

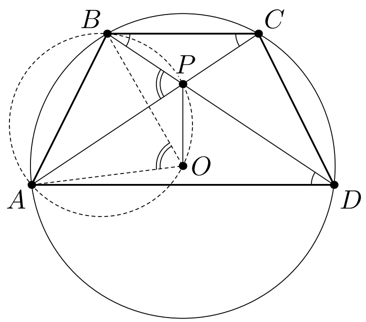


Рис. 3.5

Обозначим через 2α, 2β, 2γ, 2φ градусные меры углов A, B, C и D соответственно. Тогда $\angle KNM = \angle AND = 180^\circ -$

$-\alpha-\varphi$, $\angle KLM=\angle BLC=180^\circ-\beta-\gamma$. Поскольку $2\alpha+$ $+2\beta+2\gamma+2\varphi=360^\circ$, то $\alpha+\beta+\gamma+\varphi=180^\circ$. Таким образом, $\angle KLM+\angle KNM=360^\circ-\alpha-\beta-\gamma-\varphi=180^\circ$. Следовательно, четырёхугольник $KLNM$ вписанный (утверждение 1).

Задача 3.3. Обозначим $\angle ADB=\alpha$ (см. рис. 3.5). Поскольку $ABCD$ — равнобокая трапеция, то $\angle PBC=$ $=\angle PCB=\alpha$. Кроме того, $\angle AOB=2\angle ADB=2\alpha$ (как центральный угол), и $\angle APB=\angle PBC+\angle PCB=2\alpha$ (как внешний угол в треугольнике BPC). Следовательно, четырёхугольник $ABPO$ вписанный (утверждение 2), откуда и следует утверждение задачи.

Задача 3.4. Пусть 2α, 2β, 2γ и 2φ — градусные меры углов A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 3.6). Тогда $\angle AKD=180^\circ-\alpha-\varphi$. Поскольку треугольники ABC и BCD равнобедренные, то $\angle BAC=\angle ACB=$ $=90^\circ-\beta$ и $\angle CBD=\angle CDB=90^\circ-\gamma$. Следовательно, $\angle AMD=\angle BMC=180^\circ-(90^\circ-\beta)-(90^\circ-\gamma)=\beta+\gamma$. Поскольку $2\alpha+2\beta+2\gamma+2\varphi=360^\circ$, то $\beta+\gamma=180^\circ-\alpha-\varphi$, откуда $\angle AMD=\angle AKD$, то есть точки A, K, M и D лежат на одной окружности (утверждение 2).

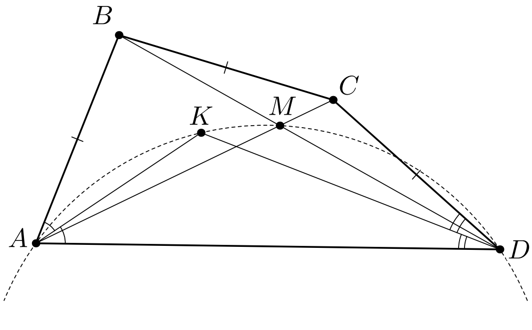


Рис. 3.6

Отметим, что уже в нескольких задачах мы используем нехитрый приём: обозначить углы, а затем посчитать. Несмотря на всю видимую простоту такого подхода, про него часто забывают.

Задача 3.5. Пусть P — вторая точка пересечения рассматриваемых окружностей (см. рис. 3.7). Четырёхугольники $AKMP$ и $MPLC$ вписанные, следовательно, $\angle APM + \angle AKM = 180^\circ$ и $\angle MPC = \angle MLC$. Из параллельности прямых AB и CD получим, что $\angle AKM = \angle MLC$, откуда $\angle APM + \angle CPM = 180^\circ$. Таким образом, точки A, P и C лежат на одной прямой.

Отметим, что задачи подобного типа непривычны для некоторых школьников. Поэтому перед решением или, наоборот, при разборе имеет смысл обратить внимание учащихся на метод доказательства того, что точки лежат на одной прямой (в данном случае мы использовали подсчёт суммы углов).

Можно было решать и по-другому (методом *подмены объекта*): обозначить точку P как точку пересечения диагонали AC и описанной окружности треугольника AKM, а затем доказать, что точки C, L, P и M лежат на одной окружности.

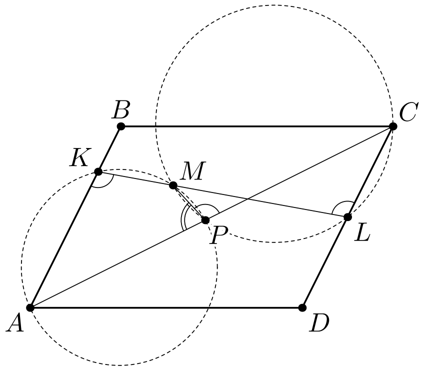


Рис. 3.7

Задача 3.6. Пусть P — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников $AB'C'$ и $BC'A'$ (см. рис. 3.8). Докажем, что точки C, B', A' и P лежат на одной окружности. Обозначим через α, β и γ градусные меры углов A, B и C соответственно. Тогда, поскольку четырёхугольники $AC'PB'$ и $BC'PA$ — вписанные, то $\angle C'PB' = 180^\circ - \alpha$ и $\angle C'PA' = 180^\circ - \beta$. Следовательно, $\angle B'PA' = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. Тогда $\angle B'PA' + \angle B'CA' = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то есть, четырёхугольник $B'PA'C$ — вписанный. Другие случаи расположения точки P рассматриваются аналогично.

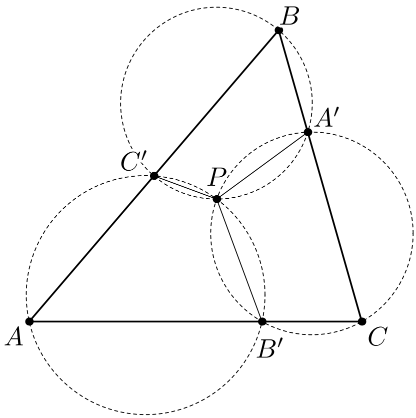


Рис. 3.8

И в этой задаче могут возникнуть схожие затруднения. Может возникнуть вопрос: как доказать, что три окружности пересекаются в одной точке? Стоит обратить внимание учащихся, что в большинстве подобных задач рассматривается точка пересечения двух окружностей и доказывается, что она принадлежит третьей.

Можно также использовать задачи Д5, Д15–Д17, Д22–Д25, Д47, Д66–Д69, Д71, Д73, Д74, Д78, Д82–Д84, Д98–Д100.

Занятие 4

Вспомогательные окружности

Занятие рассчитано на учеников 8–9 класса.

В большинстве задач предыдущих занятий окружность присутствовала или в условии задачи, например «дан вписанный четырёхугольник» или «точки … лежат на окружности» или в том, что требовалось доказать: «докажите, что точки … лежат на одной окружности» или «окружности, описанные около … пересекаются в одной точке» и. т. д.

В задачах этого занятия окружность не упоминается в условии, но, чтобы решить задачу, требуется её «увидеть». Поэтому задачи этого занятия, особенно если «вырвать их из контекста», могут оказаться достаточно сложными.

Отметим, что в некоторых задачах предыдущих занятий уже использовалась вспомогательная окружность (см. пример 2.4).

Рассмотрим несколько различных по своим конструкциям задач, в решении которых возникает вспомогательная окружность. Ещё один пример будет разобран в занятии 6.

Пример 4.1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO — биссектриса прямого угла.

В этой задаче вспомогательная окружность напрашивается, так как по признаку вписанного четырёхугольника сразу получаем, что четыре точки лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что $\angle AOB = 90^\circ$, то есть в четырёхугольнике $AOBC$ два противолежащих угла прямые (см. рис. 4.1). Следовательно, точки A, O, B и C лежат на одной окружности. Воспользуемся равенством вписанных углов, опирающихся на одну дугу, и тем, что треугольник AOB равнобедренный: $\angle ACO = \angle ABO = \angle BAO = \angle BCO$. Таким образом, CO — биссектриса угла C.

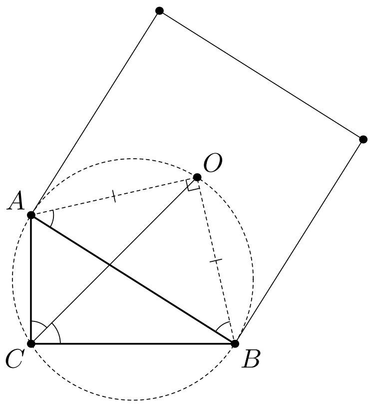


Рис. 4.1

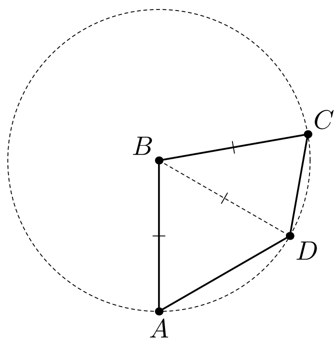


Рис. 4.2

Конструкция, связанная с окружностью и биссектрисой, более подробно будет рассмотрена позже (см. занятие 6).

Пример 4.2. В четырёхугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны 1, $\angle B = 100^\circ$, $\angle D = 130^\circ$. Найдите BD.

В отличие от предыдущей задачи, точки A, B, C и D на одной окружности не лежат. Но окружность здесь всё-таки есть!

Ответ: $BD = 1$.

Решение. Рассмотрим окружность с центром B и радиусом BA, проходящую также через точку C (см. рис. 4.2). Поскольку $\angle ADC + \frac{1}{2}\angle ABC = 180^\circ$, то эта окружность проходит через точку D (ГМТ, из которых отрезок AC виден под углом 130°). Следовательно, $BD = BA = 1$.

Заметим, что в данной задаче рассматривается окружность, которая проходит через три точки, с центром в четвёртой.

Пример 4.3. Докажите, что медиана, проведённая из вершины тупого угла треугольника, меньше половины стороны, к которой она проведена, а из острого — больше половины.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол B тупой. Построим на отрезке AC как на диаметре окружность (O — её центр, см. рис. 4.3). Поскольку $\angle B > 90^\circ$, точка B лежит внутри окружности. Следовательно, $OB < \frac{AC}{2}$. Аналогично доказывается утверждение и для случая острого угла B.

Используется факт, доказанный в примере 1.2 или в задаче 2.7.

Понятно, что медиана равна половине стороны, к которой она проведена, тогда и только тогда, когда она проведена из вершины прямого угла (см. занятие 1). Более того, утверждение, сформулированное в условии задачи, также верно в обе стороны, что часто используется во многих более сложных задачах.

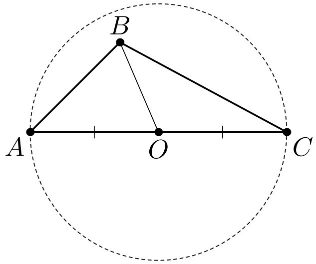


Рис. 4.3

Также подчеркнём, что построение вспомогательной окружности с данным диаметром — часто встречающийся приём.

Можно было также продлить медиану на её длину и сравнить диагонали получившегося параллелограмма.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C = \angle A_1BH$.

Задача 4.2. Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D.

Задача 4.3. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Точка D находится от точки A на расстоянии a. Какие значения может принимать величина угла BDC?

Задача 4.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD.

Задача 4.5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD равносторонний.

Задача 4.6. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок AE пересекает сторону BC, причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

Задача 4.7. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE, а вершина F — внутри отрезка AC. Докажите, что у четырёхугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E, есть параллельные стороны.

Задача 4.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD, если $AB = 2$ см.

Ответы и решения

Задача 4.1. Заметим, что точки A, C_1, A_1 и C, а также B, C_1, H и A_1 лежат на одной окружности (см. рис. 4.4). Таким образом, искомые углы равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

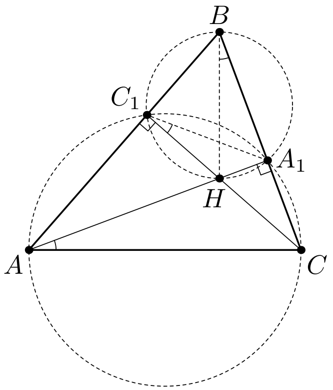


Рис. 4.4

Отметим, что данная конструкция уже встречалась (см. пример 2.4). Поэтому в решении можно было использовать уже доказанное равенство $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$, то есть антипараллельность C_1A_1 и AC.

Для того чтобы школьники хорошо ориентировались в этой конструкции, она должна возникать на протяжении всего курса геометрии. Подробнее про неё будет рассказано в занятии 8.

Задача 4.2. Ответ: 5 см.

Рассмотрим окружность с диаметром AB (см. рис. 4.5). Отрезок CD — хорда этой окружности, то есть $CD \leqslant AB = 5$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда CD также диаметр окружности.

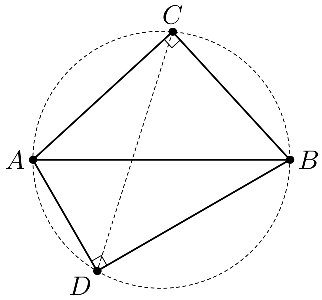


Рис. 4.5

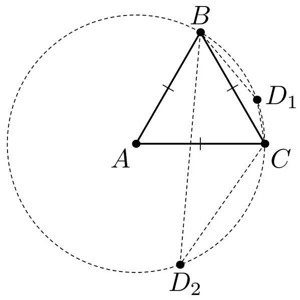


Рис. 4.6

Задача 4.3. Ответ: 30° или 150°.

Рассмотрим окружность с центром A и радиусом a, тогда точки B, C и D лежат на этой окружности (см. рис. 4.6). Угол BAC, равный 60°, центральный. Угол BDC вписанный (*два случая*). Тогда $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BAC$ или $\angle BDC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

Задача 4.4. Ответ: $AC < BD$.

Рассмотрим окружность с диаметром BD (см. рис. 4.7). Так как $\angle BAD > 90^\circ$ и $\angle BCD > 90^\circ$, точки A и C лежат внутри этой окружности (обратное утверждение к примеру 1.2). Следовательно, $AC < BD$.

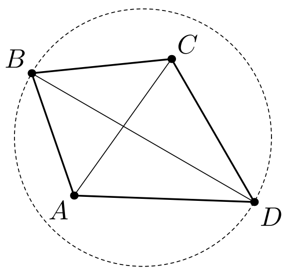


Рис. 4.7

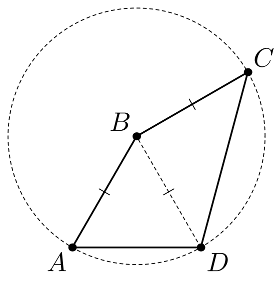


Рис. 4.8

Задача 4.5. *Первый способ.* В данном четырёхугольнике $\angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = 105^\circ$ (см. рис. 4.8). Рассмотрим окружность с центром B и радиусом BA, проходящую также через точку C. Так как $\angle ADC + \frac{1}{2}\angle ABC = 180^\circ$, эта окружность проходит через точку D. Тогда треугольник ABD равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний.

Второй способ. Построим на луче AD такую точку K, что $\angle ABK = 60^\circ$. Тогда треугольник ABK равносторонний, $BK = AB = BC$, а треугольник KBC прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $\angle BCD = \angle BCK = 45^\circ$, то есть точки K и D совпадают.

Похожим способом можно решать и другие задачи с «жёсткой» конструкцией. Тем не менее, если такие решения не используют вписанные углы, то в дальнейшем мы их приводить не будем. Читатель может попытаться их найти самостоятельно.

Задача 4.6. Ответ: 30°.

Пусть K — точка пересечения AE и BC. Проведём в данном квадрате диагональ AC (см. рис. 4.9). Из условия следует, что $\angle EKC = \angle AKB = 60^\circ$, а значит, $\angle AEC = 45^\circ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Поэтому если провести окружность с центром в точке B и радиусом $R = BA = BC$, то точка E будет лежать на этой окружности. Следовательно, $BE = BC$, то есть треугольник BEC равнобедренный с углом 30° при вершине.

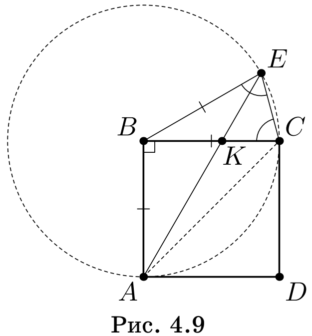


Рис. 4.9

Отметим, что задачу также можно решить «обратным ходом», то есть угадать ответ и доказать, что данная конструкция «жёсткая».

Задача 4.7. Проведём отрезок BF. Без ограничения общности можно считать, что точки A и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой BF, а точки C и E —

в другой (см. рис. 4.10). Докажем, что AD и CE параллельны.

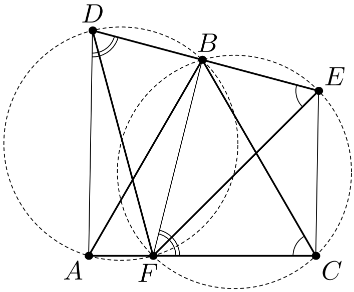


Рис. 4.10

Так как $\angle BAF = \angle BDF = 60^\circ$, четырёхугольник $ADBF$ вписанный. Аналогично из равенства углов BEF и BCF следует, что вписанным является четырёхугольник $BECF$. По свойству вписанного четырёхугольника $\angle ADB + \angle AFB = 180^\circ$ и $\angle BEC + \angle BFC = 180^\circ$. Кроме того, $\angle AFB$ и $\angle BFC$ смежные. Следовательно, $\angle ADB + \angle BEC = 360^\circ - (\angle AFB + \angle BFC) = 180^\circ$, то есть $AD || CE$.

Решение можно записать и короче, используя антипараллельность: отрезки AD и CE антипараллельны BF относительно DE и AC, то есть $AD \parallel CE$.

Задача 4.8. Ответ: 2 см или 4 см.

Из условия следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Её центр O должен лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AC.

С другой стороны, так как $\angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$, то треугольник AOB равносторонний и $\angle ABO = \angle ABD = 60^\circ$. Следовательно, O лежит на диагонали BD.

Возможны два случая: когда рассматриваемые прямые пересекаются и когда они совпадают.

1. Серединный перпендикуляр к AC и прямая BD пересекаются в точке O, то есть BD — диаметр, а $ABCD$ — прямоугольник (см. рис. 4.11а). Из прямоугольного треуголь-

ника ABD, в котором $\angle BDA = 30°$, находим, что $BD = 2AB = 4$ см.

2. Серединный перпендикуляр к AC и прямая BD совпадают (см. рис. 4.11б). Следовательно, $ABCD$ — ромб, и треугольник ADB равносторонний, откуда $BD = 2$ см.

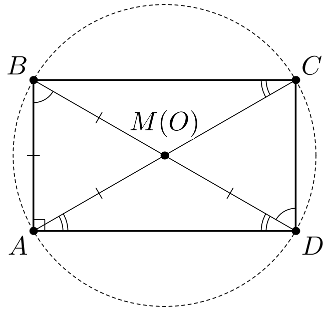


Рис. 4.11а

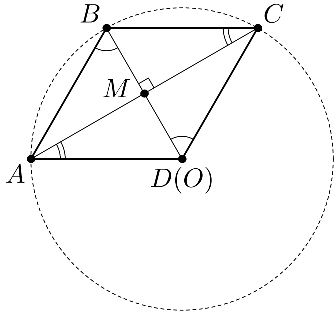


Рис. 4.11б

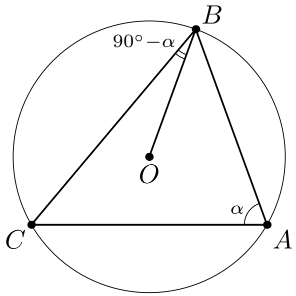


Рис. 4.11в

На самом деле, мы использовали следующую важную идею: если в треугольнике ABC $\angle A = \alpha < 90°$, то $\angle CBO = 90° - \alpha$, где точка O — центр описанной окружности. То есть центр описанной окружности можно определить как точку, равноудаленную от B и C и лежащую на луче, отложенном под данным углом в заданную полуплоскость (см. рис. 4.11в). Это утверждение мы в занятии 2 назвали «угол между радиусом и стороной». Оно нам пригодится ещё и в занятии 8.

Можно также использовать задачи Д1, Д2, Д14–Д29, Д40, Д41, Д45, Д71, Д86, Д88, Д89, Д93–Д96.

Занятие 5

Угол между касательной и хордой

Занятие ориентировано на учащихся 8–9 классов.

Перед началом занятия рекомендуем вспомнить с учащимися **теорему о вписанном угле (см. занятие 2).**

1. Теорема об угле между касательной и хордой.

Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, стягиваемую этой хордой (см. рис. 5.1а).

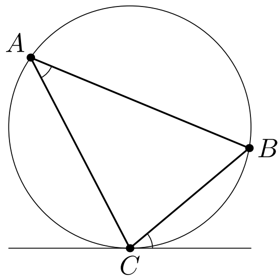


Рис. 5.1а

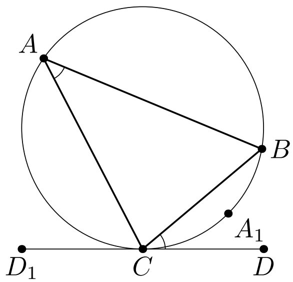


Рис. 5.1б

Заметим, что может возникнуть вопрос: какой из вписанных углов BAC или BA_1C равен углу BCD и как это определять (см. рис. 5.1б)?

Поскольку мы не хотим использовать ориентированные углы, то предлагаем следующее: точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, таким образом, $\angle BCD = \angle BAC$, а $\angle BCD_1 = \angle BA_1C$. Также можно выбирать вписанный угол, опирающийся на дугу, которая лежит внутри угла между касательной и хордой. Подобный вариант формулировки мы приведём в занятии 7.

Отметим, что работать с углом между касательной и хордой можно сразу после определения касательной. Если учащиеся знают его, то они могут доказать, что угол между касательной и хордой равен половине центрального угла.

Далее теорема об угле между касательной и хордой будет следовать из теоремы о вписанном угле (см. занятие 2).

2. Обратная теорема (признак касательной).

Если попытаться сформулировать обратное утверждение простой перестановкой условия и заключения прямого, то из-за неоднозначности выбора дуги и соответствующего ей вписанного угла можно получить формально неверное утверждение. Поэтому предлагаем, например, такой вариант формулировки.

Пусть угол BAC вписан в окружность, а точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, причем $\angle BAC = \angle BCD$* (см. рис. 5.1б). *Тогда прямая CD является касательной к данной окружности.

При желании в устном обсуждении можно «закрыть глаза» на проблему выбора угла, нарисовав ученикам конкретную картинку.

Заметим, что, поскольку касательная является предельным положением секущей, то AB и касательная к окружности в точке C антипараллельны относительно AC и BC!

Отметим, что обратное утверждение обычно у учащихся вызывает больше затруднений, поэтому рекомендуем его формулировку и доказательство (от противного) обсудить более подробно.

Рассмотрим задачу, в которой применяются оба утверждения.

Пример 5.1. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A, O и B, касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O и C, касается прямой CD.

Решение. Поскольку окружность, описанная вокруг треугольника ABO, касается BC, то $\angle BAO = \angle CBD$ (см. рис. 5.2). Из параллельности прямых AB и CD следует, что $\angle BAO = \angle OCD$. Тогда $\angle CBO = \angle OCD$, то есть CD — касательная к окружности, описанной вокруг треугольника BOC.

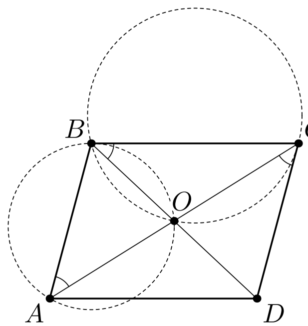


Рис. 5.2

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.1. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = EM$.

Задача 5.2. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

Задача 5.3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Задача 5.4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, M — середина AB. Окружность, описанная около треугольника AMA_1, пересекает прямую A_1B_1 в точке X. Докажите, что AX — касательная к описанной окружности треугольника ABC.

Задача 5.5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точка M — середина BC. Докажите, что:

а) касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1;

б) прямые MB_1 и MC_1 касаются описанной окружности треугольника AB_1C_1.

Задача 5.6. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

Задача 5.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведённой из вершины A.

Задача 5.8. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A_1 и B_1, в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

Ответы и решения

Задача 5.1. Поскольку AM — биссектриса угла BAC, то $\angle BAM = \angle MAC$ (см. рис. 5.3). Кроме того, так как AE — касательная к окружности, то $\angle CAE = \angle ABC$. Таким образом, $\angle AME = \angle BAM + \angle ABM$ (как внешний угол в треугольнике ABM), следовательно, $\angle AME = \angle MAE$, то есть $AE = EM$.

В случае другого расположения точек доказательство аналогично.

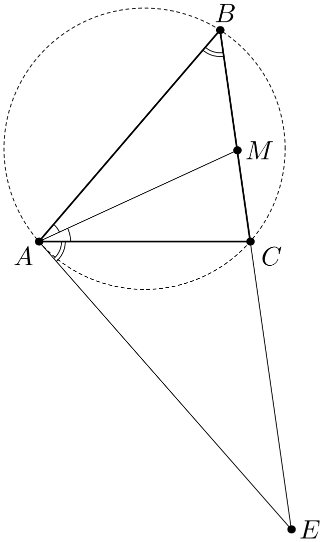


Рис. 5.3

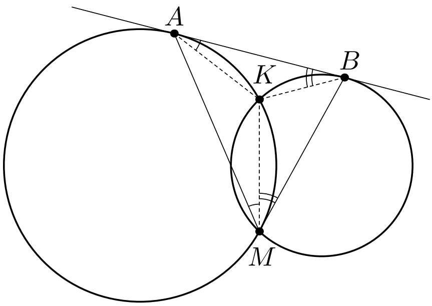


Рис. 5.4

Задача 5.2. Поскольку AB — касательная к данным окружностям, то $\angle BAK = \angle KMA$ и $\angle ABK = \angle KMB$

(см. рис. 5.4). Тогда $\angle AKB = 180^\circ - \angle BAK - \angle ABK = 180^\circ - - \angle AMB$.

Школьники, знакомые с теоремой синусов, могут также доказать, что равны радиусы окружностей, описанных около треугольников AKB и AMB.

Задача 5.3. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, поэтому $\angle BAC = \angle BDC$ (см. рис. 5.5). Поскольку KL — касательная к описанной окружности треугольника ABK, то $\angle BAC = \angle BKL$. Таким образом, $\angle BDC = \angle BKL$, то есть $KL \parallel CD$.

Заметим, что отрезки AB и CD антипараллельны относительно AC и BD. Кроме того, AB и KL также антипараллельны относительно AC и BD. Следовательно, $CD \parallel KL$.

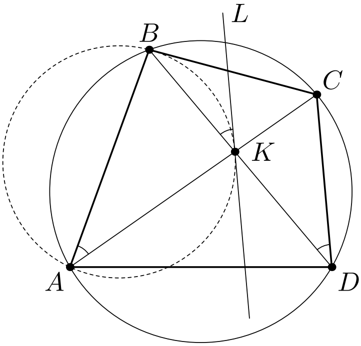


Рис. 5.5

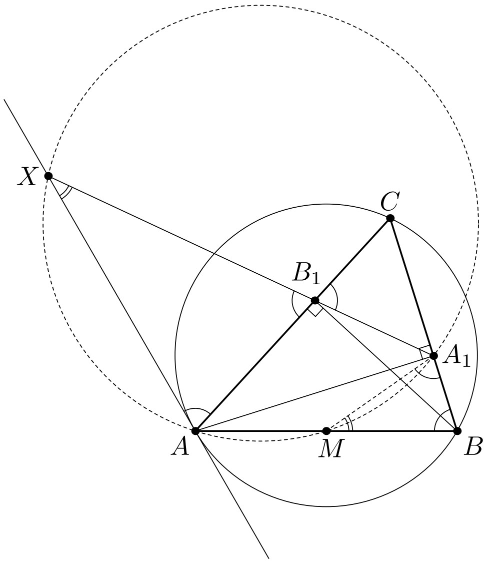


Рис. 5.6

Задача 5.4. Обозначим $\angle ABC = \alpha$ (см. рис. 5.6). Поскольку A_1M медиана в прямоугольном треугольнике AA_1B, то $\angle MA_1B = \alpha$. Четырёхугольник AXA_1M вписанный по условию, следовательно, $\angle AXA_1 = 180^\circ - \angle AMA_1 = = 180^\circ - 2\alpha$. Четырёхугольник AB_1A_1B также вписан в окружность, поэтому $\angle CB_1A_1 = 180^\circ - \angle AB_1A_1 = \alpha$. Тогда в треугольнике AXB_1: $\angle AXB_1 = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle XB_1A = \alpha$, а значит, $\angle XAB_1 = \alpha$, из чего следует утверждение задачи (см. признак касательной).

Задача 5.5. а) Пусть AK — касательная к описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 5.7а). Четырёхугольник BC_1B_1C вписанный, поэтому $\angle AB_1C_1 = 180^\circ - \angle CB_1C_1 = \angle ABC$. Поскольку AK — касательная к описанной окружности треугольника ABC, то $\angle KAC = \angle ABC$. Таким образом, $\angle KAC = \angle ABC = \angle AB_1C_1$, то есть $AK \parallel B_1C_1$.

Случай тупоугольного треугольника ABC рассматривается аналогично и предоставляется читателю.

Заметим, что AK и B_1C_1 антипараллельны BC относительно AB и AC, то есть $AK \parallel B_1C_1$. Аналогично касательная к описанной окружности треугольника AB_1C_1 параллельна BC.

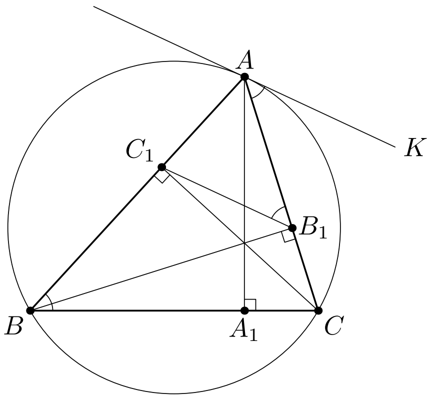


Рис. 5.7а

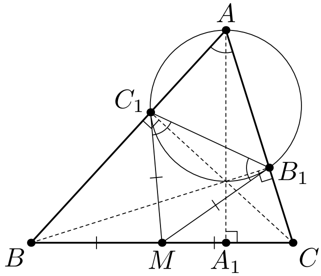


Рис. 5.7б

б) Обозначим $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ABB_1 = 90^\circ - \alpha$ (см. рис. 5.7б). Четырёхугольник BC_1B_1C вписанный, причем центром описанной вокруг него окружности является точка M (C_1M и B_1M — медианы в прямоугольных треугольниках BC_1C и BB_1C соответственно). Следовательно, $\angle C_1MB_1 = 2\angle C_1BB_1 = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку $\triangle MC_1B_1$ равнобедренный, то $\angle B_1C_1M = \angle C_1B_1M = \alpha$. Таким образом, $\angle BAC = \angle B_1C_1M = \angle C_1B_1M$, то есть MC_1 и MB_1 касательные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 (см. признак касательной).

Случай тупоугольного треугольника ABC рассматривается аналогично и предоставляется читателю.

Отметим, что задача 5.5 является ключевой и будет использована в дальнейшем.

Задача 5.6. Проведём биссектрису угла ABC до пересечения с данной окружностью в точке K (см. рис. 5.8). Тогда $\angle BAK = \angle KBC = \angle ABK$. Поскольку AC и BC — отрезки касательных, то $\triangle ABC$ равнобедренный, следовательно, $\angle CAK = \angle BAK$. Таким образом, K — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то есть центр вписанной в него окружности.

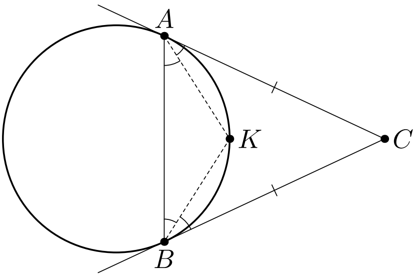


Рис. 5.8

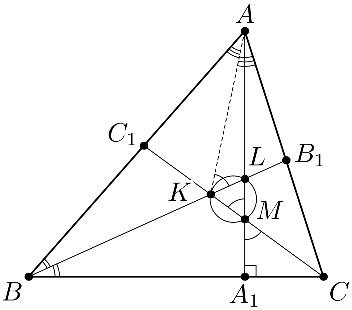


Рис. 5.9

Задача 5.7. Обозначим углы треугольника A, B и C через 2α, 2β и 2γ соответственно (см. рис. 5.9). Заметим, что $\angle AKB_1 = \alpha + \beta$, как внешний угол в треугольнике ABK. Кроме того, $\angle KML = \angle CMA_1 = 90^\circ - \gamma = \alpha + \beta$. Таким образом, $\angle AKB_1 = \angle KML$, то есть AK — касательная к описанной окружности треугольника KLM.

Задача 5.8. Заметим, что $\angle ADB = 90^\circ$, а кроме того, $\angle BB_1D = \angle BAD$ и $\angle DA_1A = \angle DBA$ (см. рис. 5.10). Проведём через точку D касательную KL к описанной окружности треугольника A_1DN и докажем, что она также является касательной к описанной окружности треугольника B_1DM. Поскольку KL — касательная, то $\angle NDL = \angle DA_1N = \angle DA_1A = \angle DBA$. Тогда $\angle ADL = 90^\circ - \angle BDL = \angle 90^\circ - \angle DBA = \angle BAD = \angle BB_1D$. Таким образом, KL является касательной и ко второй окружности.

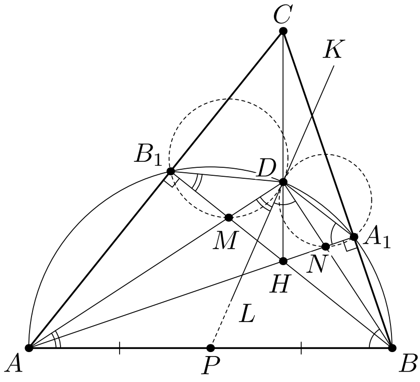


Рис. 5.10

У придирчивых читателей может возникнуть вопрос: почему луч DL проходит между сторонами угла ADB? На него можно ответить, например, так. После того как доказано равенство углов NDL и DBA, мы получим, что, с одной стороны, точки A_1 и L лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD, а с другой стороны, $\angle BDL < 90^\circ$.

Стоит обратить внимание учащихся на метод доказательства касания окружностей через угол между касательной и хордой. Вытекает он из определения касающихся окружностей (имеют общую касательную в их общей точке). Поэтому провести касательную к одной из окружностей — вполне естественное дополнительное построение.

Отметим, что можно было попробовать «угадать» искомую касательную, проведя отрезок PD, соединяющий середину отрезка AB с точкой D, и доказать, что она является касательной к данным окружностям.

Можно также использовать задачи Д27, Д30–Д39, Д76, Д81, Д83, Д84, Д104.

Занятие 6

Биссектриса делит дугу пополам

Занятие ориентировано на школьников 9 класса.

В некотором смысле оно перекликается с занятием 3 (вписанный четырёхугольник) и занятием 4 (вспомогательная окружность).

На данном занятии подробно рассматривается точка пересечения биссектрисы треугольника с описанной около него окружностью.

Отметим, что многие задачи данного занятия являются ключевыми при изучении элементарной геометрии.

Необходимо добавить, что если начинать «с нуля», то по объёму теории, примеров и задач «уложить» весь предлагаемый материал по времени в одно занятие кружка представляется малореальным. Поэтому можно разбить эту тему на несколько, например, сначала познакомить учащихся с точкой W и «леммой о трезубце», а потом уже заниматься задачами на вспомогательную окружность и признаком вписанного четырёхугольника.

Если же ученики уже знакомы с «леммой о трезубце», то это вполне может быть одним занятием.

1. Точка W (середина дуги).

Рассмотрим треугольник ABC. Пусть его биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W (см. рис. 6.1). Докажите, что:

1) $AW = CW$;

2) W лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC.

Решение. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle CAW = \angle CBW = \angle ABW = \angle ACW$. Следовательно, треугольник ACW равнобедренный, то есть $AW = CW$ и W лежит на серединном перпендикуляре к AC.

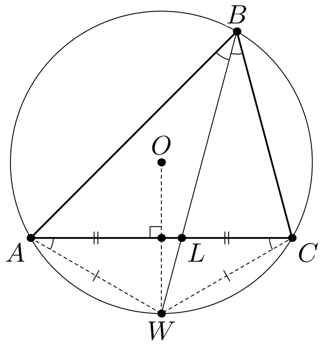


Рис. 6.1а

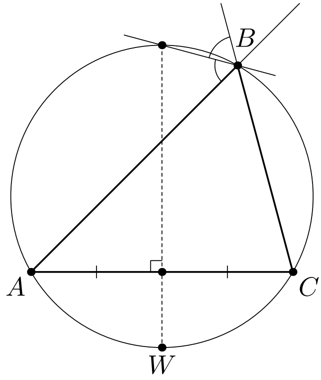


Рис. 6.1б

Заметим, что из данных утверждений следует, что:

а) *биссектриса делит дугу пополам;*

б) *биссектриса угла неравнобедренного треугольника и серединный перпендикуляр к противолежащей стороне пересекаются на описанной окружности треугольника.*

Отметим, что точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AC и биссектрисы **внешнего** угла B (см. рис. 6.1б) также лежит на описанной окружности треугольника ABC и является серединой дуги AC этой окружности, содержащей точку B, то есть диаметрально противоположна точке W.

Доказательство этого факта предоставляется читателю.

На этом занятии мы не будем подробно останавливаться на равенстве дуг и его равносильности равенству хорд. На уровне данного занятия вполне хватает соображений симметрии. Действительно, мы доказали, что W лежит на диаметре окружности, перпендикулярном отрезку AC, то есть дуги AW и CW симметричны. Более подробно о дугах будет рассказано в занятии 7.

2. Признак вписанного четырёхугольника.

I. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$: $AD = DC$, $\angle ABD = \angle CBD$. Верно ли, что он вписанный?

Решение. Нет, достаточно взять два равных треугольника и приложить их друг к другу равными сторонами (см. рис. 6.2а)

А если добавить условие $AB \neq BC$?

Тогда утверждение становится верным. Заметим, что точка D лежит на биссектрисе угла B и на серединном перпендикуляре к отрезку AC, то есть, по следствию б) она лежит на описанной окружности треугольника ABC, что и требовалось (см. рис. 6.2б).

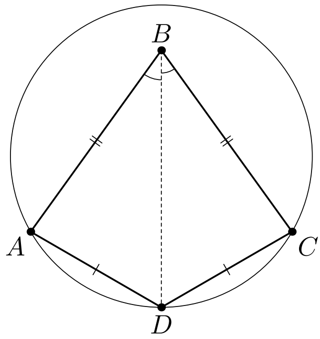


Рис. 6.2а

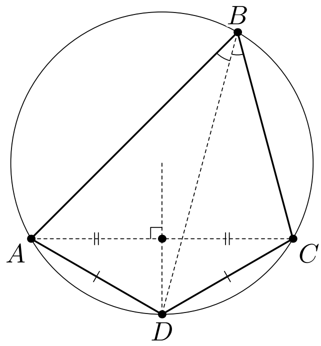


Рис. 6.2б

А где использовалось условие $AB \neq BC$?

Итак, мы доказали ещё один **признак вписанного четырёхугольника.**

Теперь попробуем разобраться, откуда взялась подобная конструкция.

Для этого рассмотрим следующую задачу.

II. В двух треугольниках равны две стороны и угол, противолежащий одной из них. Верно ли, что такие треугольники равны?

Для ответа на данный вопрос рассмотрим задачу на построение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Эта задача может иметь два решения (см. рис. 6.3). Полное исследование нас не интересует (оно проводится после изучения метрических теорем), важно, что решений не больше двух.

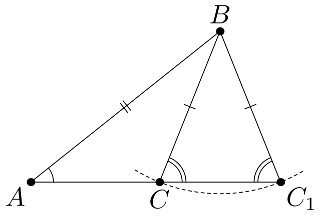


Рис. 6.3

Заметим, что $\angle ACB + \angle AC_1B = 180^\circ$. Из этого следует, что в задаче II ответ такой: **или треугольники равны, или углы, противолежащие одной из равных сторон, в сумме дают 180°.**

Приложив теперь треугольники друг к другу, во втором случае получим вписанный четырёхугольник.

Пример 6.1. В треугольнике ABC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке I, $\angle ABC = 60^\circ$. Докажите, что $ID = IE$.

Решение. Заметим, что $\angle EID = \angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 120^\circ$. Следовательно, четырёхугольник $BDIE$ вписанный (см. рис. 6.4). Поскольку BI — биссектриса угла B, то $IE = ID$.

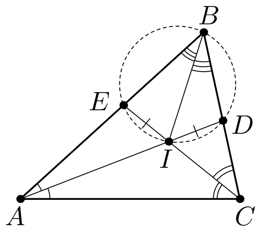


Рис. 6.4

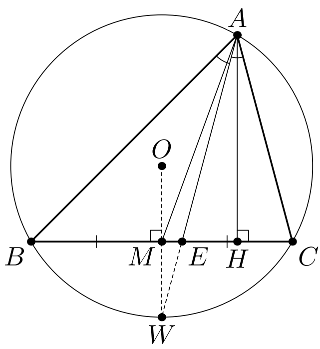


Рис. 6.5

Отметим, что мы использовали факт, который нам уже встречался в задаче 2.8: угол AIC между биссектрисами углов A и C треугольника ABC равен $90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$.

Пример 6.2. Докажите, что в любом треугольнике ABC биссектриса AE лежит между медианой AM и высотой AH.

Решение. Рассмотрим W — точку пересечения биссектрисы AE с описанной окружностью треугольника ABC (см. рис. 6.5). Докажем, что отрезки AW и MH пересекаются. Действительно, точка W принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BC и точки A и W лежат в разных полуплоскостях относительно BC, следовательно, $WMAH$ — трапеция. Тогда E — точка пересечения её диагоналей, что и требовалось.

Отметим, что данную задачу можно решить, используя свойства наклонных и проекций.

Также следует обратить внимание учащихся на то, что стандартное дополнительное построение для биссектрисы — продлить её до пересечения с описанной окружностью, так же как для медианы — продлить её на свою длину.

Пример 6.3. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что $WI = WA = WC$.

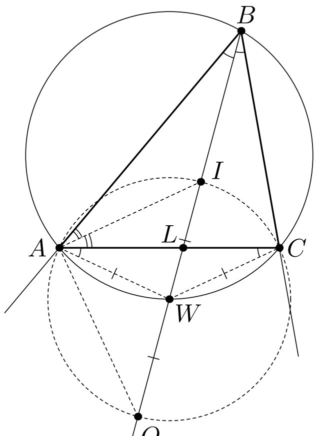


Рис. 6.6

Это утверждение иногда называют «леммой о трезубце». Существует много способов доказательства этого факта. В этом занятии мы приведём один из способов. Другой возможный способ доказательства будет рассмотрен в занятии 7.

Решение. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle CAW = \angle CBW = \angle ABW$ (см. рис. 6.6). Кроме того, $\angle AIW = \angle IAB + \angle ABW$, как внешний угол в треугольнике ABI. Следовательно, $\angle WAI = \angle AIW$, откуда $WA = WI$, что и требовалось.

Следствия из теоремы.

1. Точка W — центр окружности, описанной около треугольника AIC.

2. Центр Q вневписанной окружности, касающейся стороны AC, лежит на этой окружности.

Действительно, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, следовательно, $\angle QAI = \angle QCI = 90^\circ$, то есть четырёхугольник $QAIC$ вписанный (см. задачу 1.6).

Таким образом, *точки A, C, I и Q лежат на окружности с центром W*.

Отметим, что «лемма о трезубце» и конструкция, связанная с ней, заслуживают отдельного занятия. Но в рамках данной книги мы вынуждены ограничиться основными фактами (см. выше) и их применением.

Пример 6.4. а) AK — биссектриса треугольника ABC, P и Q — точки на двух других биссектрисах (или на их продолжениях) такие, что $PA = PK$ и $QA = QK$. Докажите, что $\angle PAQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

б) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

Решение. а) Дважды воспользуемся следствием б). Рассмотрим треугольник ABK. PQ — серединный перпендикуляр к AK и BQ — биссектриса угла B, следовательно, точки A, B, K и Q лежат на одной окружности (см. рис.

6.7а). Аналогично на одной окружности лежат точки C, A, P и K. Тогда, используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle PAQ = \angle KAP + \angle KAQ = \angle KCP + \angle QBK = \dfrac{\angle B + \angle C}{2} = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle A$.

б) Из п. а) следует, что $\angle MAN = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle A$. Кроме того, $\angle MIN = \angle BIC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle A$, следовательно, $\angle MAN + \angle MIN = 180^\circ$, то есть точки A, N, I и M лежат на одной окружности (см. рис. 6.7б).

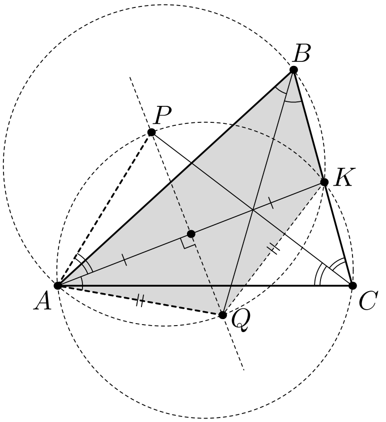


Рис. 6.7а

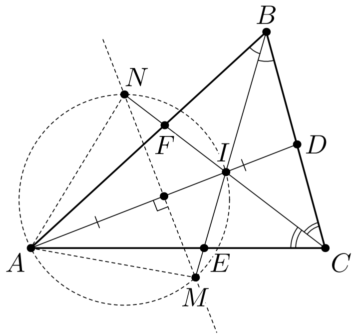


Рис. 6.7б

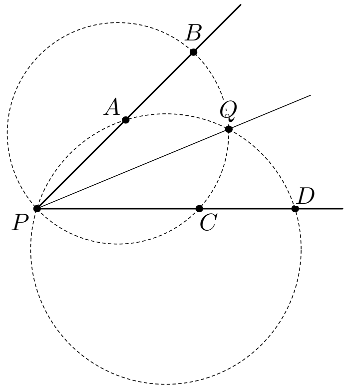
Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC. Точка D принадлежит стороне AC, причём $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.

Задача 6.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = BC$, DB — биссектриса угла D, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Найдите угол CAD.

Задача 6.3. Биссектриса AL треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке W. Докажите, что прямая WC касается описанной окружности треугольника ACL.

Задача 6.4. Две окружности проходят через вершину угла P и точку его биссектрисы Q. Докажите, что отрезки AB и CD, высекаемые ими на сторонах угла (см. рисунок), равны.



Задача 6.5. Из точки A, расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q. Пусть L — середина PQ. Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

Задача 6.6. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90°$.

Задача 6.7. а) Восстановите треугольник по точкам пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

б) Объясните, как построить треугольник, если даны три отрезка, равные медиане, биссектрисе и высоте, проведённым из одной вершины.

Задача 6.8. Восстановите треугольник ABC по его инцентру (центру вписанной окружности), середине стороны BC и основанию биссектрисы, проведённой из вершины угла A.

Ответы и решения

Задача 6.1. Из условия следует, что MD антипараллель к AB, то есть четырёхугольник $BADM$ вписанный (см. рис. 6.8). Кроме того, AM — биссектриса угла A, следовательно, $BM = MD$.

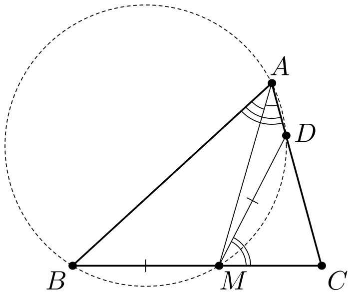


Рис. 6.8

Задача 6.2. Ответ: 30°.

Заметим, что в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и CD не равны, иначе угол BEA был бы равен 90° (см. рис. 6.9). Тогда $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Следовательно, $\angle ADC = 80^\circ$ и $\angle ADB = \angle CDB = 40^\circ$. Поскольку $\angle BEA = \angle CAD + \angle BDA$, то $\angle CAD = 30^\circ$.

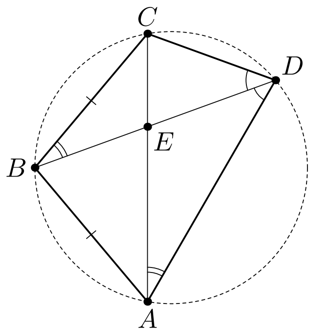


Рис. 6.9

Задача 6.3. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle WCB = \angle WAB = \angle WAC$

(см. рис. 6.10), то есть CW — касательная к описанной окружности треугольника ACL.

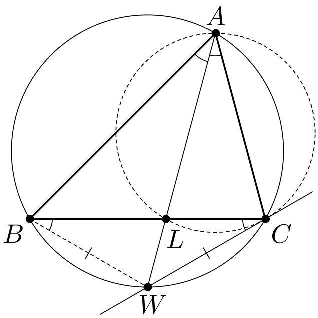


Рис. 6.10

Задача 6.4. Четырёхугольники $PBQC$ и $PAQD$ вписанные (см. рис. 6.11), следовательно, $BQ = QC$ и $AQ = QD$. Кроме того, $\angle BQC = 180^\circ - \angle P = \angle AQD$, то есть $\angle AQB = \angle DQC$. Таким образом, треугольники ABQ и DCQ равны, откуда следует, что $AB = CD$.

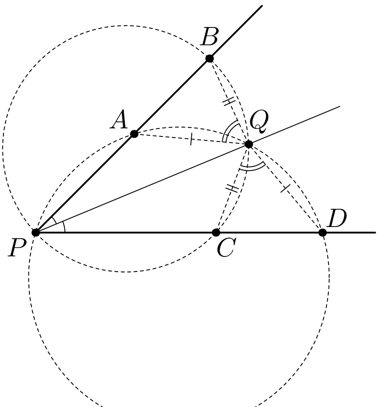


Рис. 6.11

Задача 6.5. Докажем, что четырёхугольник $AMLN$ вписанный, тогда из того, что $AM = AN$, будет следовать искомое равенство углов (см. рис. 6.12).

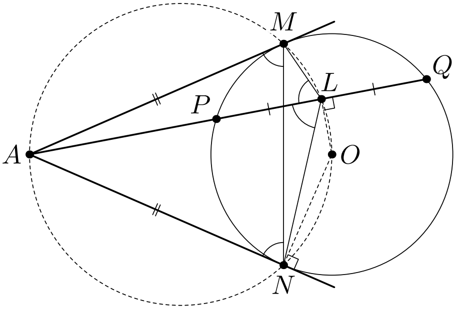


Рис. 6.12

Пусть O — центр данной окружности. Поскольку $\angle ALO = \angle ANO = 90^\circ$, то точки L и N лежат на окружности с диаметром AO. Аналогично на этой же окружности лежит и точка M.

Задача 6.6. Пусть CM, CE и CH — медиана, биссектриса и высота треугольника ABC (см. рис. 6.13).

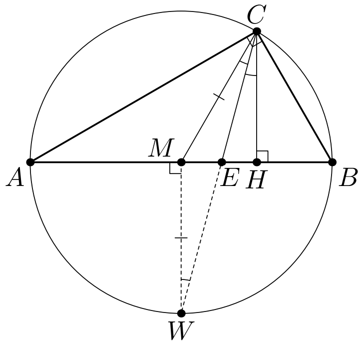


Рис. 6.13

1. Пусть $\angle C = 90^\circ$. Тогда $\angle ACM = \angle CAM = \angle BCH$, что и требовалось.

2. Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть W — точка пересечения биссектрисы с описанной окружностью треугольника ABC. Тогда из равенства $\angle MCW = \angle WCH = \angle MWC$ следует, что треугольник MCW равнобедренный. Следовательно, точка M лежит на серединном

перпендикуляре к отрезку CW. Поскольку M при этом является серединой отрезка AB (то есть лежит на серединном перпендикуляре к AB), точка M — центр описанной окружности треугольника ABC, следовательно, $\angle C = 90^\circ$.

Другой (более короткий) способ решения будет рассмотрен в занятии 8.

Задача 6.7. Пусть в треугольнике ABC отрезки AM, AL и AH — медиана, биссектриса и высота соответственно, P, W и Q — точки пересечения описанной окружности с лучами AM, AL и AH соответственно, O — центр описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 6.14).

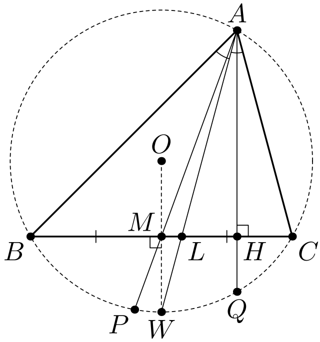


Рис. 6.14

а) Заметим, что описанные окружности треугольников PQW и ABC совпадают. Кроме того, M принадлежит OW и $OW \parallel AQ$. Тогда для того, чтобы восстановить точку A, достаточно построить описанную окружность треугольника PQW и её центр — точку O и провести через Q прямую, параллельную OW. Далее M находится как точка пересечения прямых AP и OW, после чего построение точек B и C очевидно.

б) Заметим, что серединный перпендикуляр OM к отрезку BC и биссектриса AL пересекаются на описанной окружности треугольника ABC. Отсюда вытекает следующий способ построения.

Построим прямоугольный треугольник AMH (по катету и гипотенузе) и точку L. Далее построим точку W как точку пересечения прямой AL и перпендикуляра к отрезку MH.

Теперь для того, чтобы построить оставшиеся вершины треугольника ABC, достаточно восстановить точку O как точку пересечения MW и серединного перпендикуляра к отрезку AW.

Задача 6.8. Пусть I — инцентр треугольника ABC, AL — его биссектриса, M — середина стороны BC, W — точка пересечения описанной окружности с лучом AL (см. рис. 6.15).

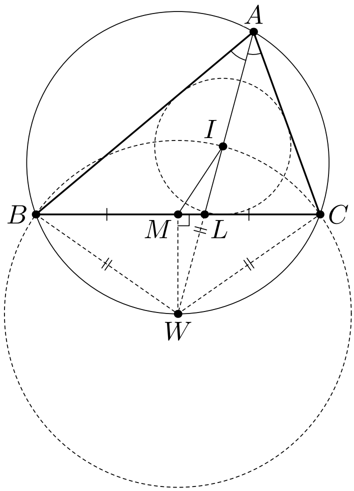


Рис. 6.15

Заметим, что

1) прямая IL и перпендикуляр к ML, проходящий через точку M, пересекаются в точке W;

2) $WB = WI = WC$ («лемма о трезубце»).

Отсюда вытекает следующий способ построения. Строим точку W. Точки B и C построим как точки пересечения окружности с центром в точке W и радиусом WI и прямой ML.

Далее точку A можно построить по-разному, например как точку пересечения прямой WI и окружности, описанной вокруг треугольника BWC, или как точку пересечения касательных к вписанной окружности треугольника ABC, проведённых из точек B и C, или как точку пересечения прямой WI с прямой, симметричной BC относительно BI.

Можно также использовать задачи Д22, Д37, Д40–Д46, Д64, Д65, Д69, Д79, Д86, Д93–Д97.

Занятие 7

Счёт дуг

Занятие ориентировано на школьников 9–10 классов. Рекомендуется его проводить не раньше, чем учащиеся познакомятся с углами, бóльшими 180°. Также желательно иметь представление об угловой величине дуги и соответственно равенстве дуг.

Отметим, что в некоторых задачах использование теоремы о вписанном угле весьма затруднительно, да и просто неудобно. Если же учащиеся научились «считать дуги», то многие сложные задачи им станут вполне по силам.

Вначале обсудим некоторые теоретические вопросы.

1. Как можно обобщить теорему о вписанном угле?

Величина угла, вписанного в окружность, равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

2. Докажите, что хорды окружности равны тогда и только тогда, когда они стягивают равные или дополняющие друг друга до окружности дуги.

Можно обсудить разные способы: симметрия, поворот, равенство центральных углов и формулы для вычисления длины дуги.

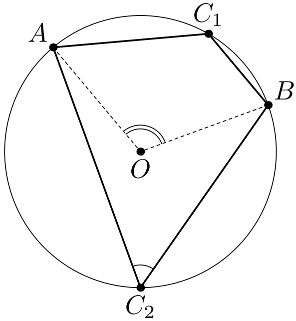


Рис. 7.1

3. Как связаны:

а) угловые величины дуг AC_1B и AC_2B (см. рис. 7.1);

б) градусные меры вписанных углов, которые на них опираются?

Их сумма равна: а) 360°; б) 180°.

На рис. 7.1 угол AC_2B равен половине меньшей дуги AB, а угол AC_1B равен половине бо́льшей дуги AB.

4. Какой ещё угол в окружности связан с угловой величиной дуги аналогичным образом и почему?

Угол между касательной и хордой, так как он равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, стягиваемую этой хордой.

Таким образом, **величина угла между касательной и хордой равна половине величины дуги, заключённой внутри этого угла и стягиваемой этой хордой.**

Перед решением задач докажем два ключевых утверждения.

Утверждение 1. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке (см. рис. 7.2). Докажите, что дуги AB и CD равны тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны.

Решение. Равенство дуг AB и CD равносильно равенству опирающихся на них вписанных углов ACB и CAD, то есть равносильно параллельности прямых AD и BC.

В случае, когда точки B и C совпадают, прямая BC становится касательной, параллельной хорде AD.

Можно также использовать равенство хорд и симметрию относительно диаметра окружности.

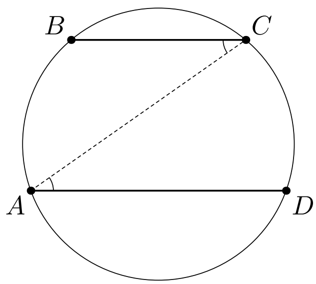


Рис. 7.2

Отметим также, что вместо дуг AB и CD можно рассматривать дуги AC и BD (поскольку дуга BC является их общей частью).

Утверждение 2. Прямые BE и CD пересекаются в точке A, не лежащей на окружности. Найдите угол BAC, если $\smile BC = \alpha$; $\smile DE = \beta$.

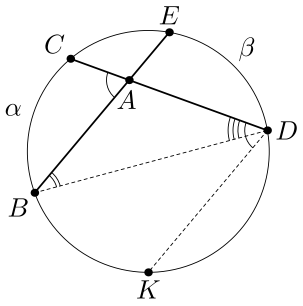


Рис. 7.3а

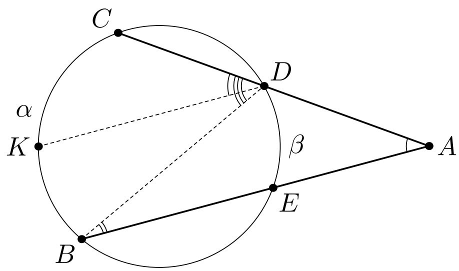


Рис. 7.3б

Решение. Возможны два случая: искомый угол — это один из углов между хордами BE и CD или угол между секущими (см. рис. 7.3а, б). Во втором случае полагаем, что $\alpha > \beta$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. В первом случае $\angle BAC = \angle ABD + \angle ADB = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Во втором случае $\angle BAC = \angle CDB - \angle ABD = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Второй способ. Проведём хорду DK параллельно AB и воспользуемся утверждением 1 (см. рис. 7.3а, б). Тогда $\smile KB = \smile ED$. Следовательно, в первом случае $\angle CDK = \angle CAB = \frac{\smile KC}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, а во втором случае $\angle CDK = \angle CAB = \frac{\smile KC}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

Заметим, что возможно разное расположение точек. В частности, для случая тупого угла между хордами картинка может быть другой. Однако доказательство вторым способом (с некоторыми изменениями) также возможно. Попробуйте найти его самостоятельно.

Отметим, что утверждение верно и в том случае, когда одна из хорд (секущих) принимает свое предельное положение (становится касательной). В случае хорд мы получаем теорему об угле между касательной и хордой.

Пример 7.1. На окружности даны точки A, B, M и N (в таком порядке). Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

Решение. *Первый способ.* Заметим, что $\angle A_1MB_1 = \angle ANB$ (см. рис. 7.4). Следовательно, равны дуги B_1A_1 и AB, что равносильно параллельности прямых AA_1 и BB_1 (см. утверждение 1).

Второй способ. Заметим, что $\frac{\smile MN + \smile A_1B}{2} = \angle MKN = \angle MLN = \frac{\smile MN + \smile AB_1}{2}$ (см. утверждение 2). Следовательно, $\smile AB_1 = \smile A_1B$, что и требовалось.

Вернёмся немного назад — к «лемме о трезубце», которую мы рассматривали на предыдущем занятии. Оказывается, её можно легко доказать, используя подсчёт дуг.

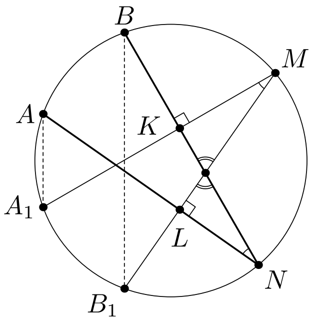


Рис. 7.4

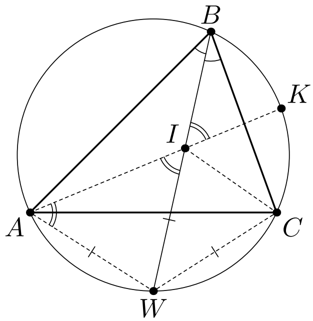


Рис. 7.5

Пример 7.2. («Лемма о трезубце».) Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что $WI = WA = WC$.

Доказательство. Равенство хорд WA и WC сразу следует из того, что BW — биссектриса (см. рис. 7.5). Докажем, что $WA = WI$. Заметим, что $\angle AIW = \frac{\smile BK + \smile WA}{2} = \frac{\smile KC + \smile CW}{2} = \frac{\smile KW}{2} = \angle WAI$. Следовательно, $WA = WI$, что и требовалось.

Подробнее рассмотрим переход «от углов к дугам». При всей кажущейся простоте он может вызвать серьёзные затруднения. Попробуем объяснить, почему мы говорим о дугах только сейчас, а не в занятии 2.

Проблема 1. *Углы, бо́льшие* 180°. Поскольку мы устанавливаем соответствие между дугой и углом, приходится рассматривать центральные углы больше 180°. И тут может быть не совсем понятно, что означает «угол опирается на дугу» (см. занятие 2). Эти проблемы могут быть частично решены, если ввести понятие угла как части плоскости (плоского угла). Тогда определение из занятия 2 (угол опирается на дугу) легко распространить и на углы, бо́льшие 180°.

Проблема 2. *Что такое равные дуги*? В принципе, можно воспринимать равенство дуг как равенство фигур, то есть дуги равны, если они переводятся друг в друга движением. Так мы и поступили в занятии 6, когда говорили, что биссектриса делит дугу пополам. Но чтобы работать с дугами, удобнее говорить про их угловую меру. А это, в свою очередь, становится более привычным после того, как получено представление о длине дуги и радианной мере угла. Тогда ясно, что равные дуги одной окружности — это дуги, имеющие одинаковую угловую меру или одинаковую длину. Теперь, когда мы складываем или вычитаем дуги, то, исходя из пропорциональности длины дуги и её угловой меры, мы можем легко «менять» дугу на угол и наоборот.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $\dfrac{180^\circ}{n}$.

Задача 7.2. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой B_1D_1.

Задача 7.3. В окружность вписаны равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

Задача 7.4. а) Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B и C — три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

б) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть точки M и N — середины дуг CD и AB. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AEB (или содержит её).

Задача 7.5. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что четырёхугольник $KECD$ вписанный.

Задача 7.6. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причем $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

Задача 7.7. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника ABC, то они содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат высоты треугольника ABC, то они содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Задача 7.8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые, содержащие противоположные стороны AB и CD, при продолжении пересекаются в точке K, а прямые, содержащие стороны BC и AD, — в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны, а точки их пересечения со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

Задача 7.9. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть I_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а I_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Прямая I_1I_2 отсекает от треугольника AEB треугольник с вершиной E. Докажите, что он равнобедренный.

Ответы и решения

Задача 7.1. Утверждение задачи следует из того, что углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, являются или полусуммой, или полуразностью дуг, угловые меры которых кратны $\dfrac{360^\circ}{n}$ (например, см. рис. 7.6а, б).

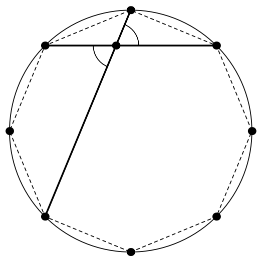


Рис. 7.6а

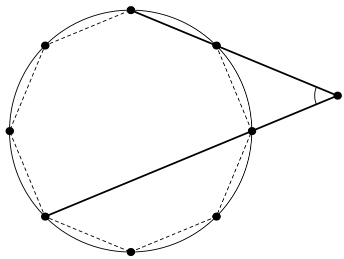


Рис. 7.6б

Задача 7.2. Пусть K — точка пересечения прямых A_1C_1 и B_1D_1 (см. рис. 7.7). Докажем, что угол A_1KB_1 прямой. Действительно, $\angle A_1KB_1 = \dfrac{\smile A_1B + \smile BB_1 + \smile C_1D + \smile DD_1}{2} = \dfrac{\smile AB + \smile BC + \smile CD + \smile DA}{4} = 90^\circ$.

Утверждение задачи также может быть получено из равенства смежных углов, например A_1KB_1 и B_1KC_1.

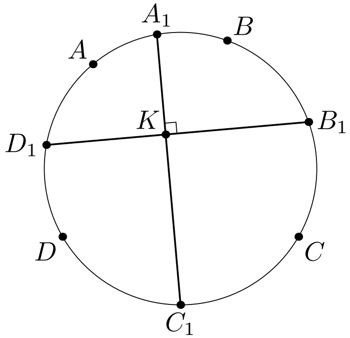


Рис. 7.7

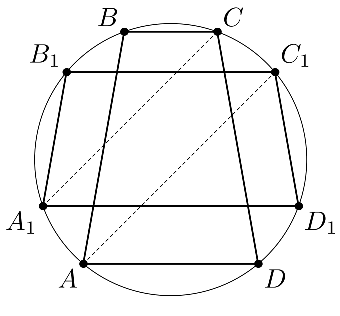


Рис. 7.8

Задача 7.3. Поскольку $AD \parallel A_1D_1$ и $CD \parallel C_1D_1$ (см. рис. 7.8), то $\smile AA_1 = \smile DD_1 = \smile CC_1$. Следовательно, $\smile AC = \smile A_1C_1$, то есть, $AC = A_1C_1$.

Задача 7.4. а) Пусть A_1 и B_1 — середины дуг AB и AC, а M и N — точки пересечения прямой A_1B_1 и отрезков AB и AC соответственно (см. рис. 7.9а).

Докажем равенство углов AMN и ANM. Действительно, $\angle AMN = \dfrac{\smile A_1B + \smile AB_1}{2} = \dfrac{\smile A_1A + \smile CB_1}{2} = \angle ANM$.

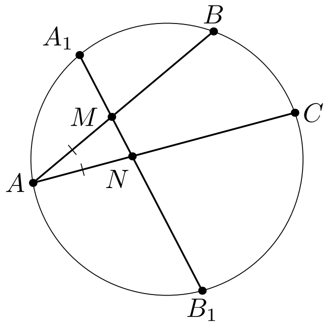


Рис. 7.9а

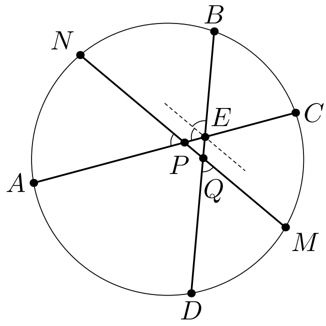


Рис. 7.9б

б) Пусть P и Q — точки пересечения NM с отрезками AC и BD соответственно (см. рис. 7.9б). Заметим, что параллельность биссектрисы внешнего угла и стороны треугольника равносильна тому, что он равнобедренный. Поэтому достаточно доказать равенство углов BQN и CPM. Действительно, $\angle CPM = \dfrac{\smile CM + \smile AN}{2} = \dfrac{\smile DM + \smile BN}{2} = \angle BQN$.

Также можно было доказать, что угол APN равен половине угла AEB.

Отметим, что в случае совпадения точек P и Q прямая MN содержит биссектрису угла AEB и в решении ничего не поменяется.

Отметим также, что пункт б) является обобщением пункта а). Действительно, если точку A из пункта а) «раздвоить», то получим утверждение, эквивалентное пункту б).

Задача 7.5. Для того чтобы доказать утверждение задачи, достаточно доказать равенство углов ECD и MKB (см. рис. 7.10). Сделаем это: $\angle MKB = \dfrac{\smile MB + \smile AD}{2} = \dfrac{\smile MA + \smile AD}{2} = \angle ECD$.

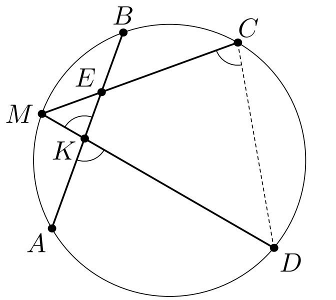


Рис. 7.10

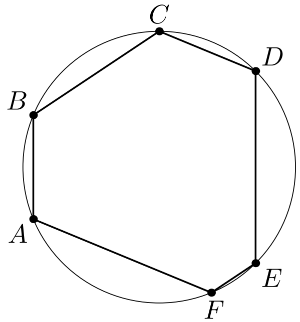


Рис. 7.11

Задача 7.6. Поскольку $AB \parallel DE$, то $\smile BC + \smile CD = \smile EF + \smile FA$ (см. рис. 7.11). Аналогично из параллельности хорд BC и EF следует, что $\smile FA + \smile AB = \smile CD + \smile DE$. Сложив эти равенства, получим $\smile AB + \smile BC = \smile DE + \smile EF$, то есть $CD \parallel AF$, что и требовалось.

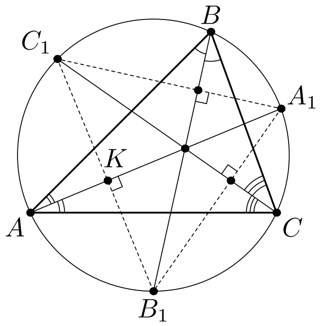


Рис. 7.12а

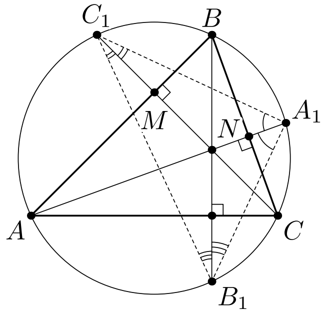


Рис. 7.12б

Задача 7.7. а) Пусть K — точка пересечения AA_1 и C_1B_1 (см. рис. 7.12а). Докажем, что $\angle C_1KA_1 = 90^\circ$ (для остальных углов доказательство аналогично). Действительно, $\angle C_1KA_1 = \dfrac{\smile C_1B + \smile BA_1 + \smile B_1A}{2} = \dfrac{\smile AB + \smile BC + \smile CA}{4} =$ $= 90^\circ$, что и требовалось.

Отметим, что это утверждение и метод его доказательства аналогичны задаче 7.2.

б) Пусть M и N — основания высот в треугольнике ABC (см. рис. 7.12б). Докажем, что B_1B — биссектриса угла $C_1B_1A_1$ (для остальных углов доказательство аналогично). Действительно, $\angle C_1MB = \angle BNA_1 = 90^\circ$, откуда $\smile C_1B + \smile CA = \smile BA_1 + \smile CA$. Следовательно, $\smile C_1B = \smile BA_1$, что и требовалось.

Задача 7.8. Обозначим дуги цифрами (см. рис. 7.13).

Первый способ. Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения биссектрис углов BKC и BLA с окружностью, T — точка пересечения биссектрис, M, N, P и Q — точки пересечения биссектрис со сторонами четырёхугольника.

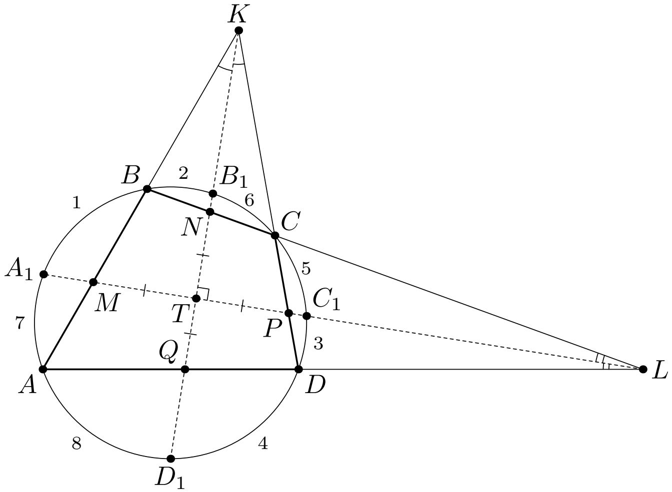


Рис. 7.13

Заметим, что перпендикулярность прямых LA_1 и KD_1 равносильна следующему равенству дуг: $\smile 1 + \smile 2 + \smile 3 + \smile 4 = \smile 5 + \smile 6 + \smile 7 + \smile 8$.

Поскольку KD_1 — биссектриса угла BKC, то $\smile 8 - \smile 2 = \smile 4 - \smile 6$ (*). Аналогично, $\smile 7 - \smile 3 = \smile 1 - \smile 5$ (**). Сложив равенства (*) и (**), получим требуемое.

Далее, заметим, что в треугольниках NLQ и MKP биссектрисы являются высотами, следовательно, они также и медианы, откуда $TN = TQ$ и $TM = TP$, то есть $MNPQ$ — параллелограмм, а поскольку его диагонали перпендикулярны, он является ромбом.

Второй способ. Докажем, что треугольник LNQ равнобедренный. Для этого достаточно доказать, что $\angle LNQ = \smile 5 + \smile 3 + \smile 4 + \smile 2 = \smile 3 + \smile 5 + \smile 6 + \smile 8 = \angle LQN$. Это, в свою очередь, эквивалентно равенству $\smile 8 - \smile 2 = \smile 4 - \smile 6$.

Задача 7.9. Пусть W — середина дуги AB (см. рис. 7.14), M и N — точки пересечения прямых BE и AE с прямой I_1I_2 соответственно; P и Q — точки пересечения прямых CW и BD, DW и AC соответственно. Тогда $WA = WB = WI_1 = WI_2$ («*лемма о трезубце*»). Далее можно рассуждать различными способами.

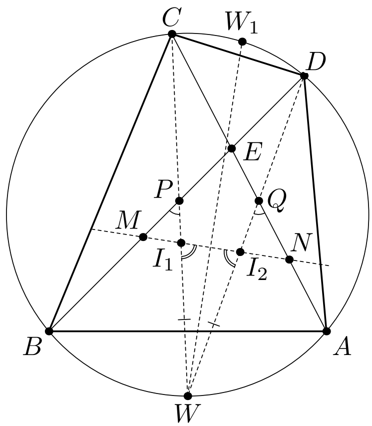


Рис. 7.14

Первый способ. $\angle BPW = \dfrac{\smile CD + \smile WB}{2} = \dfrac{\smile CD + \smile AW}{2} = \angle WQA$, следовательно, $\angle EMN = \angle ENM$, что и требовалось.

Второй способ. Пусть W_1 — середина дуги CD. Тогда $WW_1 \perp I_1I_2$, как биссектриса в равнобедренном треугольнике I_1WI_2. Кроме того, по задаче 7.4 прямая WW_1 параллельна биссектрисе угла AEB. Следовательно, биссектриса угла AEB перпендикулярна I_1I_2, то есть треугольник MEN равнобедренный.

Можно также использовать задачи Д29, Д43, Д46–Д51, Д77, Д101.

В частности, если хочется подробнее рассмотреть конструкцию из задачи 7.9, можно использовать задачи Д49 и Д50.

Занятие 8

Вписанный угол и ортоцентр

Занятие ориентировано на школьников 9 класса, хотя многие задачи доступны и восьмиклассникам. Отметим, что с задачами на вписанные углы в данной конструкции мы уже сталкивались (см. занятия 1–5). К задачам на конструкцию с ортоцентром (точкой пересечения высот или их продолжений) нужно периодически возвращаться, так как она возникает на разных этапах и во всех темах, которые изучаются в школьном курсе геометрии. Мы же подробнее остановимся на задачах, связанных со вписанными углами.

Докажем несколько ключевых фактов, которые используются в решении многих задач.

Пример 8.1. Ортоизогональ. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, BB_1 — высота. Докажите, что $\angle ABO = \angle CBB_1$.

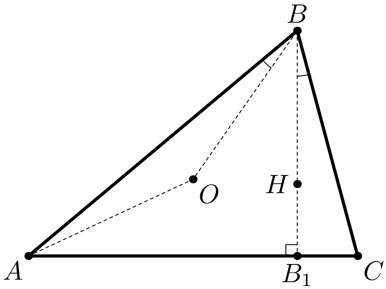


Рис. 8.1а

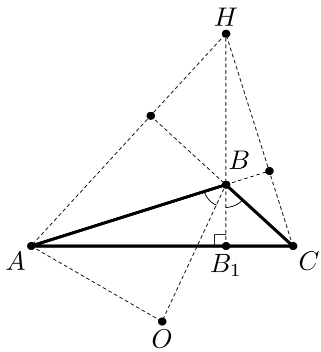


Рис. 8.1б

Заметим, что утверждение задачи можно сформулировать по-другому: прямые BO и BH (H — ортоцентр) симметричны относительно биссектрисы угла B (при этом *лучи* BO и BH для случая острого угла B

симметричны относительно биссектрисы внутреннего, а для случая тупого — внешнего угла B). Также говорят, что точки O и H *изогонально сопряжены*.

Решение. Пусть угол C острый. Тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (см. рис. 8.1а, б), то есть $\angle CBB_1 = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ABO$.

Если угол C тупой, то $\angle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$ (см. рис. 8.1в). Тогда $\angle CBB_1 = \angle ACB - 90^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ABO$.

Случай, когда угол C прямой — очевиден.

Отметим также, что данное утверждение (правда, в другой формулировке) нам уже встречалось и мы называли его «углом между радиусом и стороной» (см. занятия 2 и 4).

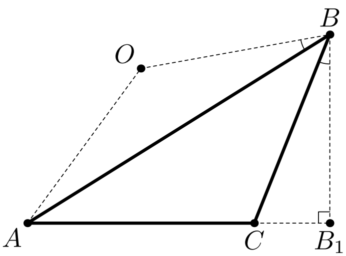


Рис. 8.1в

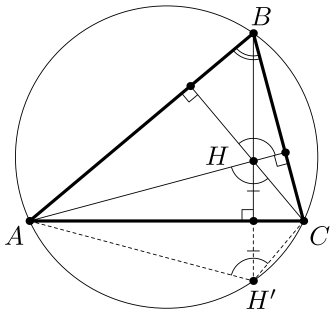


Рис. 8.2

Пример 8.2. Симметрия. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Пусть H' — точка, симметричная ортоцентру H относительно прямой AC (см. рис. 8.2). Тогда $\angle AH'C = \angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$, из чего и следует утверждение задачи.

Мы рассмотрели случай остроугольного треугольника ABC. Случай тупого угла B рассматривается аналогично. Если же тупым является, например, угол C, то $\angle AH'C = \angle AHC = \angle ABC$.

Отразить ортоцентр относительно прямой, содержащей сторону, или относительно середины стороны (см. задачу 8.6) — часто встречающийся приём.

Пример 8.3. Угол 60°. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника ABC до вершины B равно радиусу описанной окружности тогда и только тогда, когда $\angle ABC = 60^\circ$ или $\angle ABC = 120^\circ$.

Треугольники с углами 60° и 120° обладают рядом любопытных свойств и признаков, в том числе связанных с ортоцентром.

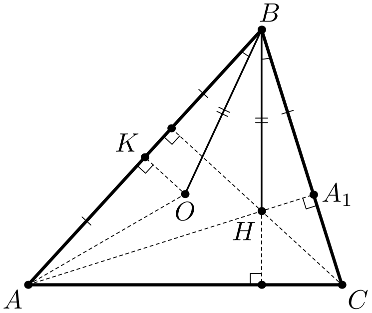


Рис. 8.3а

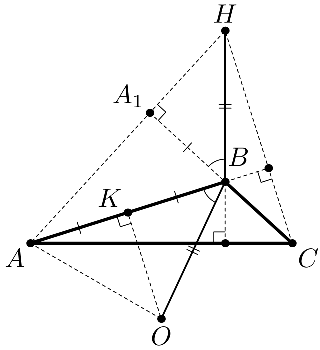


Рис. 8.3б

Решение. Пусть точка K — середина отрезка AB, а угол B острый (см. рис. 8.3а). Тогда $\angle ABO = \angle CBH$ (пример 8.1, рис. 8.1а). Следовательно, $BO = BH$ тогда и только тогда, когда $BA_1 = BK = \frac{AB}{2}$, то есть в том и только том случае, когда $\angle ABC = 60^\circ$.

Мы рассмотрели случай, когда углы A и C острые. Случай, когда один из них тупой (см., например, рис. 8.1в), рассматривается аналогично. Случай, когда один из них прямой, очевиден.

Аналогично в случае тупого угла B (см. рис. 8.3б) $\angle ABO = \angle HBA_1$, то есть $BO = BH$ тогда и только тогда, когда $BA_1 = BK = \frac{AB}{2}$, что равносильно тому, что $\angle ABA_1 = 60^\circ$, а $\angle ABC = 120^\circ$.

Возможны и другие способы доказательства.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.1. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найдите ГМТ ортоцентров треугольника ABC.

Задача 8.2. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Докажите, что точки A, центр описанной окружности O, инцентр I, ортоцентр H и C лежат на одной окружности.

Задача 8.3. а) Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

б) Три окружности равных радиусов проходят через точку H и попарно пересекаются в трёх других точках A, B и C. Докажите, что H — ортоцентр треугольника ABC.

Задача 8.4. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки B на A_1C_1, из точки A на B_1C_1 и из точки C на A_1B_1 пересекаются в одной точке. Что это за точка?

Задача 8.5. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH (точка H лежит на отрезке AB). Докажите, что $\angle ACM = \angle BCH$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 8.6. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника, и диаметрально противоположны его вершинам.

Задача 8.7. В треугольнике ABC угол A равен 60°; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $IO = IH$ и $I_aO = I_aH$.

Задача 8.8. Даны окружность и хорда AB, отличная от диаметра. По бо́льшей дуге AB движется точка C. Окружность, проходящая через точки A, C и точку H — ортоцентр треугольника ABC, повторно пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что прямая PH проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки C.

Ответы и решения

Задача 8.1. Пусть у треугольника ABC ни один из углов A или B не является прямым. Тогда $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ в случае острых углов A и B и $\angle AHB = \angle ACB$ в случае, когда один из них тупой. То есть H принадлежит окружности.

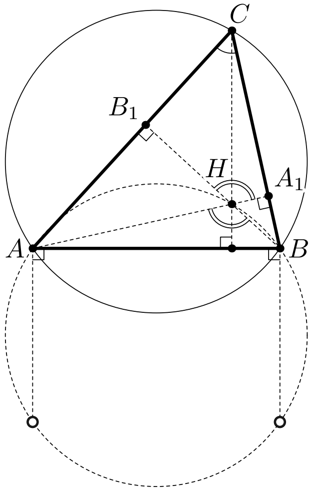


Рис. 8.4

Более того, для каждого положения точки H на этой окружности, кроме точек, проецирующихся в точки A и B, вершина C восстанавливается однозначно (C — ортоцентр треугольника AHB). Точка H рассматриваемой окружности, проецирующаяся в вершину A или B, не может быть ортоцентром, поскольку AH должна быть перпендикулярна прямой BC, но $AH \perp AB$.

Если же один из углов A или B прямой, то ортоцентр треугольника ABC совпадает с вершиной прямого угла.

Следовательно, искомое ГМТ — окружность, симметричная данной, (см. пример 8.2) исключая точки, проецирующиеся в вершины A и B, — см. рис. 8.4.

Задача 8.2. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (доказательство для тупоугольного предоставляем читателю). Поскольку $\angle ABC = 60^\circ$, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$. Кроме того, $\angle AHC = \angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ$ и $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC = 120^\circ$. Следовательно, $\angle AOC = \angle AIC = \angle AHC$, то есть точки A, O, I, H и C лежат на одной окружности.

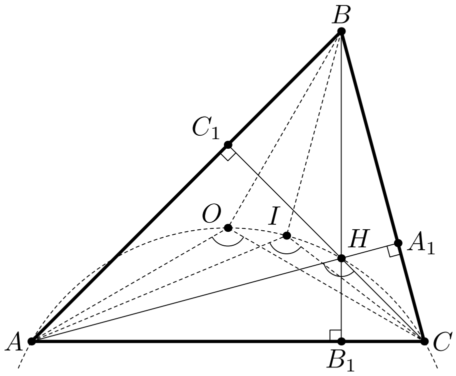


Рис. 8.5

Отметим, что центр рассматриваемой окружности лежит на середине дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки B («лемма о трезубце», см. занятие 6).

Задача 8.3. а) Поскольку при симметрии относительно прямой AC ортоцентр H переходит в точку, принадлежащую описанной окружности треугольника ABC (см. пример 8.2), то описанные окружности треугольников ABC и AHC симметричны относительно AC. Следовательно, их радиусы равны. Аналогично для остальных окружностей.

Возможно также доказательство при помощи следствия из теоремы синусов.

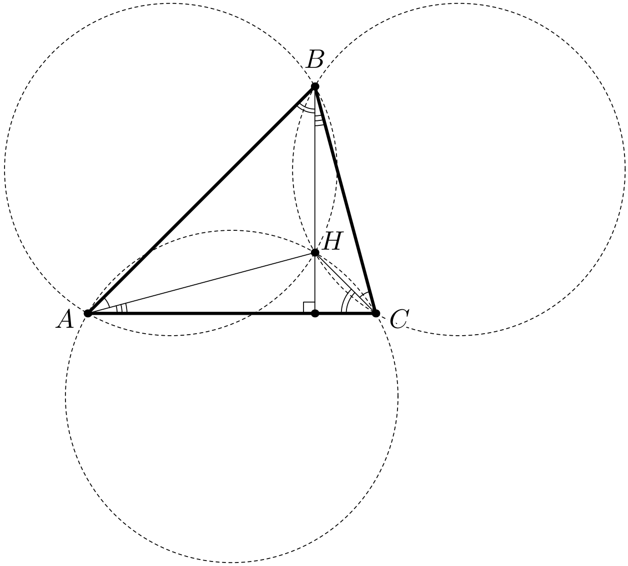


Рис. 8.6

б) В равных окружностях на равные хорды опираются равные острые углы, следовательно, $\angle BAH = \angle BCH$, $\angle ABH = \angle ACH$ и $\angle CAH = \angle CBH$ (см. рис. 8.6). Из суммы углов треугольника ABC получим, что $2(\angle BAH + \angle ABH + \angle CAH) = 180^\circ$, откуда $\angle BAH + \angle ABH + \angle CAH = 90^\circ$, то есть BH — высота треугольника ABC. Аналогично доказывается, что AH и CH также высоты.

Отметим, что в решении мы явно опирались на расположение точек на рисунке. Случай, когда точка H находится вне треугольника ABC, рассматривается аналогично.

Задача 8.4. Докажем, что описанные в условии задачи перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC. Пусть треугольник ABC остроугольный, случай тупоугольного рассматривается аналогично. Точка B_2 — основание перпендикуляра, опущенного на A_1C_1 из точки B (см. рис. 8.7). Поскольку $\angle ACB = \angle BC_1A_1$ (AC и A_1C_1 антипараллельны), то $\angle ABB_2 = \angle CBB_1$. Следовательно, луч BB_2 содержит центр O описанной окружности треугольника ABC (см. пример 8.1). Аналогично доказывается, что и два других перпендикуляра содержат точку O.

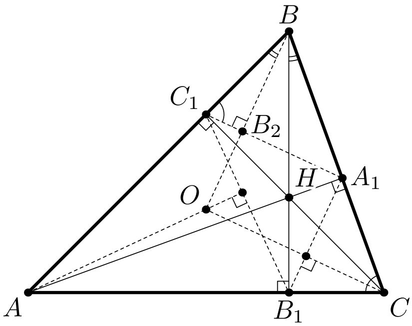


Рис. 8.7

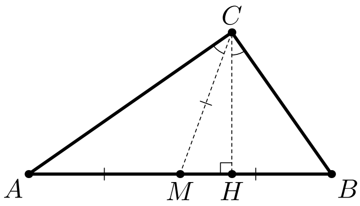


Рис. 8.8

Задача 8.5. Пусть O — центр описанной окружности. Поскольку $\angle ACO = \angle BCH$ (см. пример 8.1), то равенство углов ACM и BCH (см. рис. 8.8) равносильно равенству $\angle ACO = \angle ACM$, то есть, поскольку углы A и B острые, точка O лежит на медиане CM треугольника ABC. Поскольку точка O также лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, то равенство углов из условия задачи равносильно тому, что O — середина AB, то есть $\angle ACB = 90^\circ$.

Отметим, что эта задача (в другой формулировке) нам уже встречалась — см. занятие 6.

Задача 8.6. Пусть треугольник ABC остроугольный, случай тупоугольного рассматривается аналогично. Пусть H' — точка, симметричная ортоцентру H относительно середины M стороны AC треугольника ABC (см. рис. 8.9) Тогда $\angle AH'C = \angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$, то есть H' принадлежит описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, поскольку M — середина отрезков HH' и AC, четырёхугольник $AHCH'$ — параллелограмм. Следовательно, $H'C \parallel AH$, то есть $\angle H'CB = 90^\circ$, откуда следует, что $H'B$ — диаметр окружности.

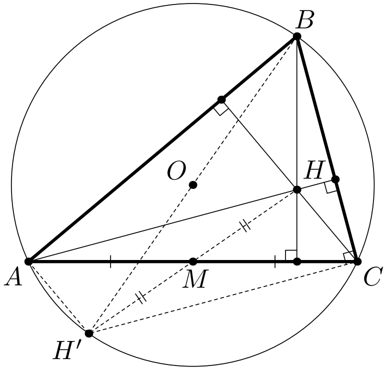


Рис. 8.9

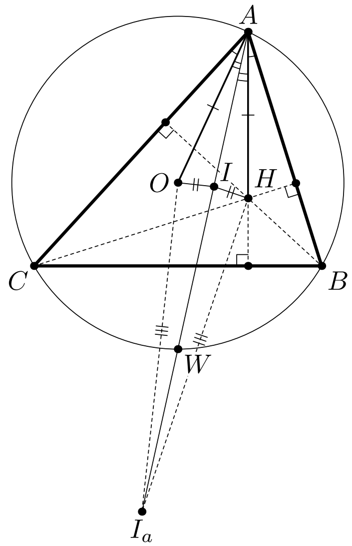


Рис. 8.10

Задача 8.7. Поскольку $\angle A = 60^\circ$ (см. рис. 8.10), то $AO = AH$ (см. пример 8.3). Кроме того, так как угол A острый, то лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы AI (см. пример 8.1). Следовательно, точки O и H симметричны относительно биссектрисы, из чего и следует утверждение задачи.

На рисунке изображён случай, когда углы B и C острые. Но, на самом деле, доказательство не меняется и в случае, когда один из них тупой.

Также можно предложить ученикам найти ещё некоторые свойства рассматриваемой конструкции, например, доказать, что $WOAH$ — ромб (W — середина дуги AC), или что $\angle I_aOI = 90^\circ$.

Задача 8.8. Поскольку точка C движется по бо́льшей дуге AB, то угол C острый. Рассмотрим некоторое положение точки C, при котором треугольник ABC остроугольный и точка P лежит на отрезке BC (см. рис. 8.11). Поскольку четырёхугольник $ACPH$ вписанный, то $\angle PHA_1 = \angle ACP = \alpha$. Рассмотрим окружность w, симметричную описанной окружности треугольника ABC относительно

AB. Поскольку $\angle ACB + \angle AHB = 180^\circ$, точка H принадлежит w. Пусть X — точка пересечения w и прямой PH. Докажем, что при движении точки C по дуге AB описанной вокруг треугольника ABC окружности все прямые PH проходят через точку X. Действительно, при движении точки C точка H двигается по окружности w, кроме того, $\angle AHX = \angle PHA_1 = \alpha$. Поскольку $\alpha = \text{const}$, то все углы AHX в окружности w опираются на одну и ту же дугу AX.

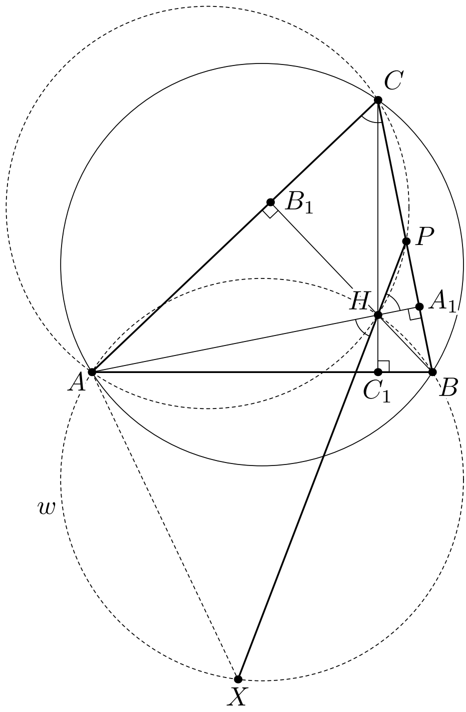


Рис. 8.11

Случаи, когда точка P не лежит на отрезке BC или треугольник ABC тупоугольный, рассматриваются аналогично. При этом в случае тупоугольного треугольника ABC точка H движется по бо́льшей дуге окружности w.

Можно также использовать задачи Д35, Д42, Д44, Д51–Д66, Д68–Д70, Д72, Д80.

Занятие 9

Две пересекающиеся окружности

Занятие ориентировано на школьников 9–11 классов. Отметим, что некоторые задачи (9.1, 9.3 и 9.4) доступны и восьмиклассникам, но проводить занятие целиком имеет смысл, когда пройдено и подобие, и площади. Также учащиеся должны уметь работать с касательными (см. занятие 5), дугами (см. занятие 7) и ортоизогональю (см. занятие 8).

Отметим, что во всех задачах возможны различные варианты расположения точек и окружностей. Условимся, что основным вариантом для нас будет картинка, изображённая на рис. 9.1а, и именно для такого расположения окружностей и хорд мы будем приводить полное доказательство во всех задачах. Доказательство в остальных случаях аналогично и предоставляется читателю. При этом в каждом случае мы будем приводить картинку с одним из других возможных случаев расположения точек (рис. б) или в) в каждой задаче).

Пример 9.1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что:

а) длина отрезка BC не зависит от выбора точки A;

б) касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

Решение. а) Достаточно доказать, что все такие отрезки BC стягивают равные дуги. Заметим, что $\angle PAQ$ постоянен, как и дуга PQ второй окружности (см. рис. 9.1а). Кроме того, $\angle PAQ$ равен полуразности дуг BC и PQ второй окружности (см. занятие 7).

б) Заметим, что $\angle PAX = \angle PQA$, как угол между касательной и хордой. С другой стороны, четырёхугольник $PBCQ$ вписанный, следовательно, $\angle PBC = \angle PQA$, откуда и следует искомое.

Отметим, что можно рассуждать и по-другому: PQ и BC антипараллельны относительно прямых AB и AC, и аналогично антипараллельны AX и PQ, из чего и следует параллельность касательной и BC.

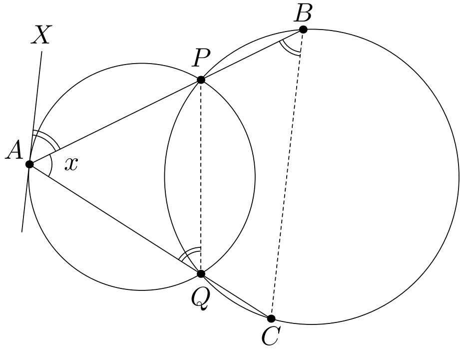


Рис. 9.1а

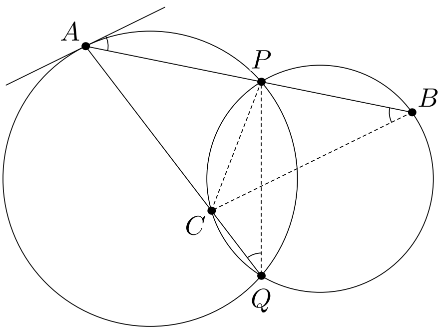


Рис. 9.1б

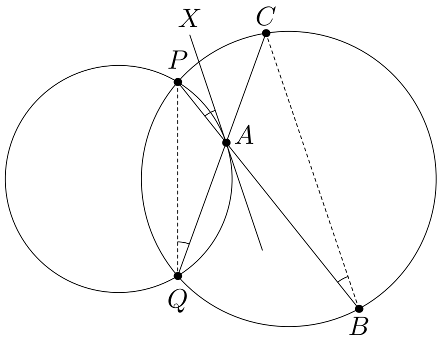


Рис. 9.1в

Заметим, что возможны также и другие случаи, см. рис. 9.1б, в. В случае, изображённом на рис. 9.1б, угол PAQ равен полуразности дуг BQ и PC, то есть полуразности дуг BC и PQ, как и в первом случае.

В случае, изображённом на рис. 9.1в, угол PAQ постоянный и дополняет угол x с рис. 9.1а до 180°. Далее, если выразить его как угол между хордами и вместо дуги BC взять дополняющую её до окружности, получим, что дуга $BQPC$ выражается через угол x и дугу PQ так же, как в первом случае, то есть, длина отрезка BC не меняется при изменении положения точки A на первой окружности.

Решение задачи для пункта б) в других случаях (см. рис. 9.1б, в) полностью аналогично разобранному и предоставляется читателю.

Отметим также, что случай, изображённый на рис. 9.1в, нам уже встречался в виде задачи 5.3.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что угол AQB не зависит от положения секущей.

Задача 9.2. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B соответственно. Докажите, что треугольники AQB и O_1QO_2 подобны.

Задача 9.3. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q — секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Задача 9.4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке E. Докажите, что точки B, C, D и E лежат на одной окружности.

Задача 9.5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают обе окружности в точках A и B. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около всех таких треугольников AQB.

Во всех следующих задачах занятия использована следующая конструкция и обозначения.

Даны две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной точки X первой окружности (отличной от точек A и B) обозначим через Y и Z точки пересечения прямых XA и XB соответственно со второй окружностью.

Задача 9.6. Докажите, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведённому через точку X.

Задача 9.7. а) Для каждой точки X построена прямая, содержащая высоту треугольника XYZ, проведённую из вершины X. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

б) Выбрана одна из двух дуг, на которую первую окружность делят точки A и B. Для каждой точки X выбранной дуги построена прямая, содержащая биссектрису треугольника XYZ, проведённую из вершины X. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

в) То же, что в п. а), но прямая содержит медиану.

Задача 9.8. Найдите положение точки X, при котором площадь треугольника XYZ наибольшая.

Задача 9.9. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников XYZ.

Задача 9.10. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ, вторично пересекает первую окружность в точке P. Докажите, что угол XPO_2 прямой.

Ответы и решения

Задача 9.1. Утверждение задачи следует из того, что для соответствующего расположения точек углы PAQ и PBQ постоянны (опираются на одни и те же дуги PQ в своих окружностях), см. рис. 9.2а, б.

Обозначим центральные углы, опирающиеся на дуги PQ, принадлежащие одной окружности и лежащие внутри другой, через 2α и 2β (например, см. обозначения на рис. 9.2а). Тогда во всех случаях искомый угол равен $180^\circ - \alpha - \beta$.

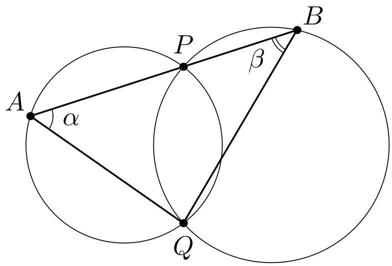


Рис. 9.2а

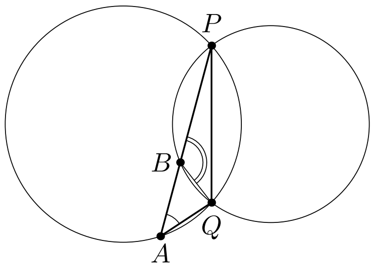


Рис. 9.2б

Задача 9.2. Заметим, что $\angle BAQ = \dfrac{1}{2}\angle PO_1Q = \angle O_2O_1Q$ (см. рис. 9.3а, б). Аналогично $\angle ABQ = \dfrac{1}{2}\angle PO_2Q = \angle O_1O_2Q$, из чего и следует подобие рассматриваемых треугольников.

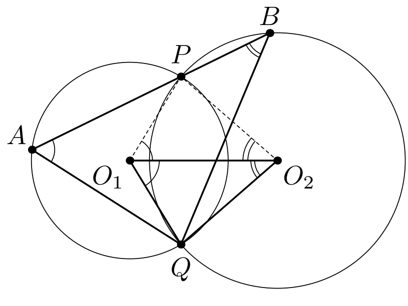


Рис. 9.3а

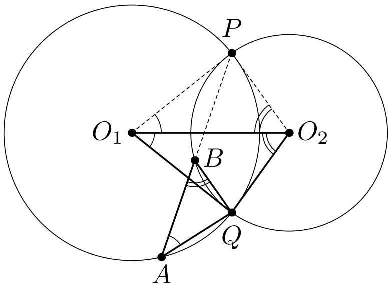


Рис. 9.3б

С этим утверждением и соответствующей конструкцией мы ещё столкнёмся в занятии 10.

Задача 9.3. Четырёхугольники $APQC$ и $PBDQ$ вписанные (см. рис. 9.4а), следовательно, $\angle ACQ = 180^\circ - \angle APQ = \angle BPQ$, откуда $\angle ACQ + \angle BDQ = 180^\circ$, то есть $AC \parallel BD$.

Отметим, что пункт б) примера 9.1 есть предельный случай данной задачи.

Отметим также, что можно рассуждать и так: AC и PQ антипараллельны относительно AB и CD, равно как и BD и PQ, следовательно, $AC \parallel BD$.

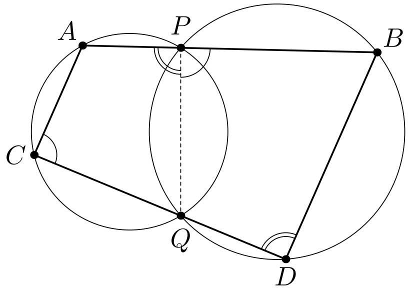


Рис. 9.4а

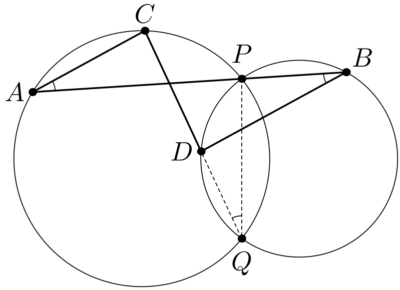


Рис. 9.4б

Помимо случая, изображённого на рис. 9.4б, возможны ещё несколько случаев. Доказательство во всех случаях аналогично и предоставляется читателю.

Задача 9.4. *Первый способ.* Поскольку CE и DE — касательные к окружностям, то $\angle ABC = \angle ECD$ и $\angle ABD = \angle EDC$ (см. рис. 9.5а). Следовательно, $\angle CED = 180^\circ - \angle ECD - \angle EDC = 180^\circ - \angle CBD$, то есть четырёхугольник $BCED$ вписанный.

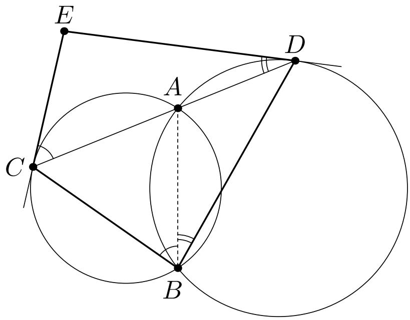


Рис. 9.5а

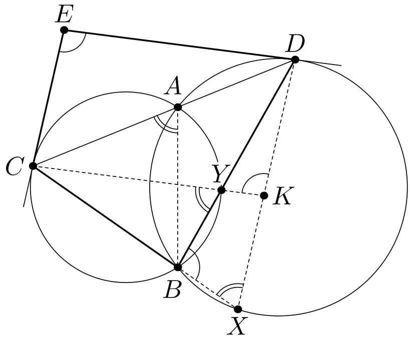


Рис. 9.5б

Заметим, что задачу можно решить, воспользовавшись утверждением разобранного в начале занятия примера. Несмотря на то что решение удлинняется, мы этот способ всё-таки приведём.

Второй способ. Пусть X и Y — точки пересечения прямых CB и DB со второй и первой окружностями соответственно (см. рис. 9.5б). Из примера 9.1 следует, что $CE \parallel DX$, а $DE \parallel CY$. Тогда $\angle CED = \angle CKD$. Четырехугольники $CAYB$ и $BADX$ вписанные, поэтому $\angle CYB = \angle CAB = \angle CXD$. Следовательно, $\angle CXD + \angle BYK = 180^\circ$, то есть четырёхугольник $BYKX$ вписанный. Но тогда $\angle CKD = \angle YBX$, откуда $\angle CED + \angle CBD = 180^\circ$, что и требовалось.

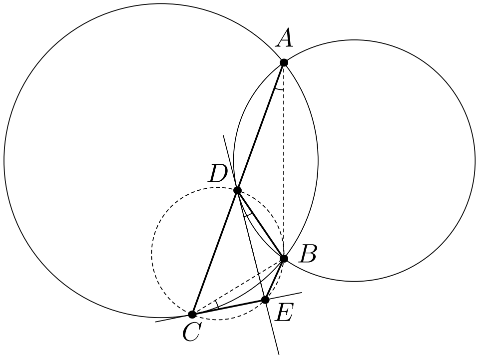


Рис. 9.5в

Задача 9.5. Ответ: искомым ГМТ является окружность, описанная вокруг треугольника O_1QO_2, исключая точку Q (O_1 и O_2 — центры данных окружностей).

Пусть O_1, O_2 — центры данных окружностей, а точка O — центр окружности, описанной около треугольника AQB (см. рис. 9.6а, б).

Заметим, что OO_1 и OO_2 — серединные перпендикуляры к отрезкам AQ и BQ. Пусть окружности и секущая расположены так, как это показано на рисунке 9.6а. Тогда $\angle O_1OO_2 = 180^\circ - \angle AQB = 180^\circ - \angle O_1QO_2$. Следовательно, точка O находится на дуге описанной окружности треугольника O_1QO_2, не содержащей точку Q.

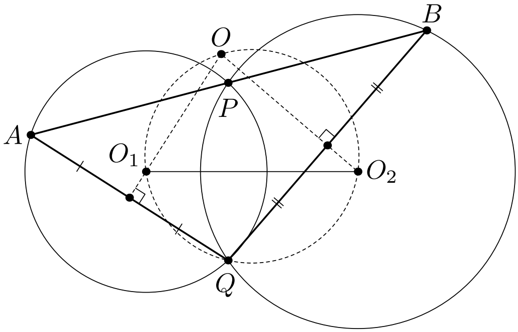


Рис. 9.6а

Если же окружности и секущая расположены так, как это показано на рисунке 9.6б, то $\angle O_1OO_2 = \angle AQB$. Следовательно, точка O находится на дуге описанной окружности треугольника O_1QO_2, содержащей точку Q.

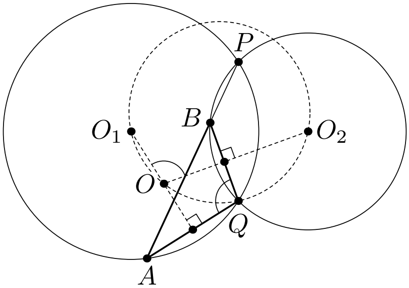


Рис. 9.6б

Осталось показать, что любая точка описанной окружности треугольника O_1QO_2 (исключая точку Q) удовлетворяет условию. Действительно, по точке O мы можем восстановить точки A и B.

Задача 9.6. Воспользуемся тем, что отрезок YZ параллелен касательной к первой окружности в точке X (см. пример 9.1). Диаметр этой окружности, проходящий через точку X, перпендикулярен касательной, а следовательно, и отрезку YZ (см. рис. 9.7а, б).

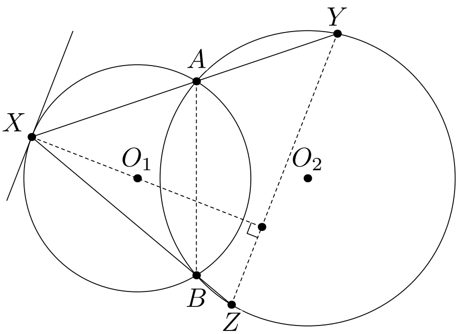


Рис. 9.7а

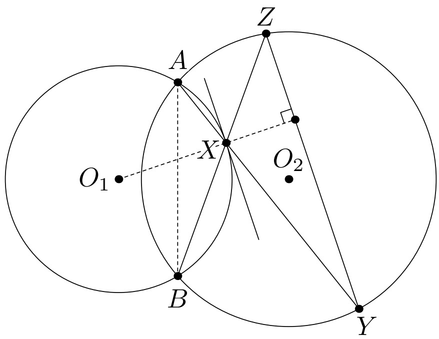


Рис. 9.7б

Заметим, что утверждение задачи можно доказать, используя антипараллельность: AB и YZ антипараллельны, а в треугольнике XAB рассматриваемый диаметр проходит через центр описанной окружности этого треугольника. Следовательно, этот диаметр является ортоизогональю в треугольнике ABC и высотой в треугольнике XYZ (см. занятие 8).

Задача 9.7. а) Из предыдущей задачи следует, что все высоты таких треугольников проходят через точку O_1 (см. рис. 9.7а, б).

б) Все биссектрисы углов YXZ проходят через середину дуги AB первой окружности, не содержащей точку X.

в) Воспользуемся следующим фактом (который ещё называют *основной задачей о симедиане*): в треугольнике ABC симедиана, проведённая из вершины C, проходит через точку пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B.

В нашем случае в силу антипараллельности AB и YZ медианы всех таких треугольников XYZ являются симедианами треугольников XAB (см. приложение), то есть проходят через точку пересечения касательных в точках A и B к первой окружности.

Основную задачу о симедиане можно доказать, используя чертёж и результат задачи 5.5б. Для треугольника AB_1C_1 прямая AM в силу антипараллельности BC и B_1C_1 содержит симедиану (см. утверждение 2 из приложения и рис. 5.7б).

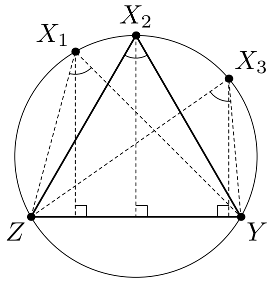


Рис. 9.8

Задача 9.8. Заметим, что у всех таких треугольников XYZ равны основания YZ (утверждение примера 9.1). А угол YXZ постоянен в каждом из двух случаев расположения точки X на дуге первой окружности (см. рис. 9.7а, б). Следовательно, наибольшую площадь будет иметь треугольник с наибольшей высотой, то есть равнобедренный треугольник (см. рис. 9.8) с точкой X, лежащей на первой окружности, но вне второй.

Задача 9.9. Ответ: искомым ГМТ является образ первой окружности при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$, кроме точек, соответствующих точкам A и B.

Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника XYZ. Докажем, что $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{O_1O_2}$ (см. рис. 9.9). Для этого достаточно доказать, что XO_1O_2O — параллелограмм (случай, когда точки X, O_1 и O_2 лежат на одной прямой, очевиден).

Заметим, что точки O и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку YZ. Тогда из задачи 9.6 следует, что $XO_1 \parallel OO_2$ (они оба перпендикулярны отрезку YZ). Отрезки AB и YZ антипараллельны относительно прямых XY и XZ, следовательно, XO — ортоизогональ треугольника XYZ, то есть высота треугольника ABX. Поскольку линия центров O_1O_2 перпендикулярна общей хорде AB, получаем, что $O_1O_2 \parallel XO$, то есть XO_1O_2O — параллелограмм.

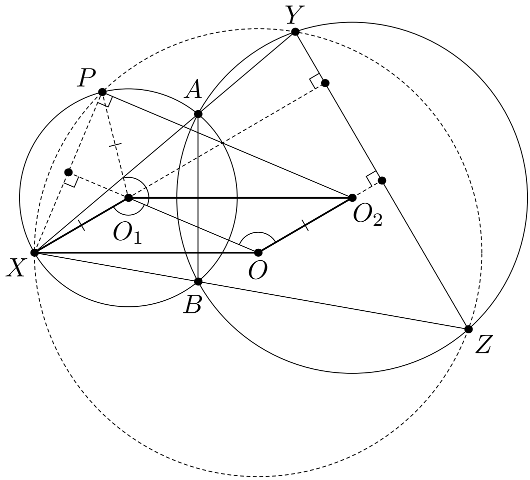


Рис. 9.9

Задача 9.10. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника XYZ (см. рис. 9.9). Из предыдущей задачи следует, что XO_1O_2O — параллелограмм (случай, когда все четыре точки лежат на одной прямой, очевиден).

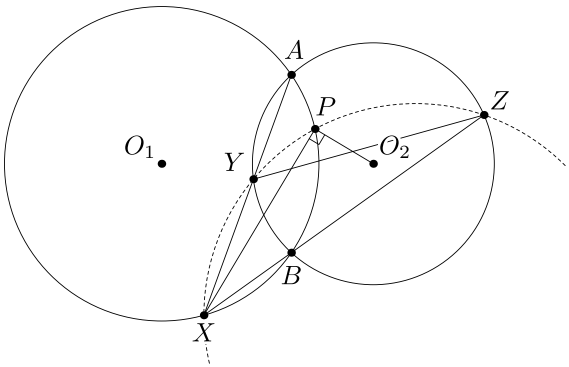


Рис. 9.10

Заметим, что точки O и O_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку PX. Тогда $\angle PO_1O = \angle XO_1O = \angle O_2OO_1$ и $O_1P = O_1X = O_2O$, из чего следует, что PO_1OO_2 — равнобокая трапеция, то есть $PO_2 \parallel OO_1$. Поскольку $OO_1 \perp PX$, то и $PO_2 \perp PX$, что и требовалось.

Можно также использовать задачи Д6, Д13, Д30–Д33, Д73–Д76, Д78–Д80.

Занятие 10

Точка Микеля

На этом занятии мы рассмотрим конструкцию, связанную с точкой Микеля, и покажем, что на самом деле она имеет непосредственное отношение к прямой Симсона.

Занятие ориентировано на учеников 9–11 классов. Рекомендуем проводить его после изучения темы «Преобразования». Также предполагается, что учащиеся уверенно работают со вписанными углами и в конструкциях с несколькими окружностями.

Заметим, что прямая Симсона и её свойства заслуживают отдельного занятия, однако это уже выходит за рамки данной книги. Также отметим, что полностью это занятие (в представленном виде) годится для школьников, уже немного знакомых с теоремой о прямой Симсона и точкой Микеля. Можно также для начала проводить отдельное занятие по точке Микеля (например, убрав из задач к данному занятию задачи 10.5, 10.6 и 10.7), а потом показывать её связь с прямой Симсона.

Отметим также, что во всех разбираемых задачах мы будем ограничиваться рассмотрением только одного из возможных случаев расположения точек. Остальные случаи разбираются аналогично.

Четыре прямые таковы, что каждые три из них ограничивают треугольник. Вокруг каждого из этих четырёх треугольников описана окружность (см. рис. 10.1). Тогда полученные окружности имеют общую точку (*точка Микеля*).

Доказательство. Рассмотрим четыре прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B, C, D, E и F (см. рис. 10.1). Тогда на чертеже образуются четыре треугольника: ABF, AED, BEC и CFD. Докажем, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку. Рассмотрим две окружности и докажем, что их точка пересечения принадлежит ещё двум.

Пусть окружности, описанные около треугольников AED и ABF, пересекаются в точке M, отличной от A. Тогда $\angle BFM = \angle BAM$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Аналогично, $\angle EAM = \angle EDM$. Следовательно, $\angle CDM = \angle CFM$, то есть точки C, D, F и M лежат на одной окружности. Для точек C, B, E и M доказательство аналогично.

Полученная точка M называется точкой Микеля для прямых AF, AE, BF и ED.

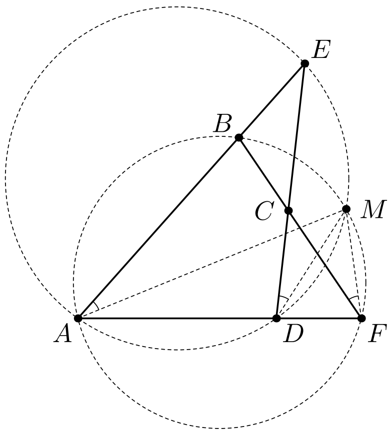


Рис. 10.1

Вспомним формулировку теоремы Симсона.

Основания перпендикуляров, опущенных из точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой (см. рис. 10.2).

Доказательство. *Первый способ.* Пусть точки P_a, P_b и P_c — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно (см. рис. 10.2). Докажем, что $\angle P_bP_aC = \angle BP_aP_c$.

Действительно, используя вписанность четырёхугольников $ABPC$ и AP_cPP_b, получим, что $\angle BPC = 180^\circ - \angle BAC = \angle P_cPP_b$. Следовательно, $\angle P_cPB = \angle P_bPC$.

Поскольку четырёхугольник $P_bP_aP_C$ вписанный, то $\angle P_bPC = \angle P_bP_aC$. Аналогично $\angle P_cPB = \angle P_cP_aB$, то есть, $\angle BP_aP_c = \angle BPP_c = \angle P_bPC = \angle P_bP_aC$.

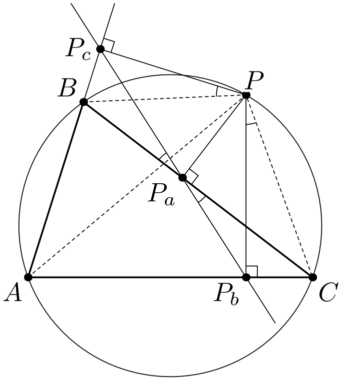


Рис. 10.2

В процессе доказательства мы получили, что точка P принадлежит описанным окружностям треугольников, образованных четырьмя прямыми: AB, BC, AC и P_cP_b, — то есть является для них точкой Микеля. Помимо того что мы увидели взаимосвязь этих двух понятий, теперь мы можем доказать теорему о прямой Симсона и другим способом — с использованием точки Микеля.

Второй способ. Точка P лежит на описанных окружностях треугольников ABC и AP_cP_b. Стороны этих треугольников лежат на четырёх прямых: AB, AC, BC и P_bP_c (AP_c совпадает с AB, AP_b — с AC). Следовательно, P является точкой Микеля для этих прямых. Поэтому P лежит на описанных окружностях треугольников, ограниченных тройками прямых AB, BC, P_bP_c и AC, BC, P_bP_c. Второй точкой пересечения рассматриваемых окружностей является общая вершина этих треугольников, то есть точка пересечения прямых BC и P_bP_c. С другой стороны, первая окружность является описанной окружностью треугольника PP_cB, то есть содержит точку P_a. Аналогично P_a лежит и на второй окружности. Следовательно, эти окружности пересекаются в точках P и P_a, то есть P_a и является точкой пересечения прямых BC и P_bP_c.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D соответственно. Докажите, что:

а) $AB = CD$;

б) треугольники AMC и BMD равнобедренные;

в) $\triangle ABM = \triangle CDM$;

г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$;

д) M — центр поворота, переводящего треугольник ABM в треугольник CDM, а одну окружность в другую.

е) Докажите, что если окружности не равны, то треугольники подобны, причем M — центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой и одну окружность в другую.

Задача 10.2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. M — точка Микеля для данных четырёх прямых. Докажите, что:

а) если $BE = DF$, то M — центр поворота, переводящего отрезок BE в FD;

б) M — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BE в FD (или DE в FB);

в) докажите, что в п. а) точка M — середина дуги DE окружности, описанной около треугольника ADE;

г) докажите, что в п. б) точка M такова, что отношения $MD : ME$ и $DF : BE$ равны.

Задача 10.3. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка E, а на луче BC (за точкой C) — точка F так, что $AE = CF$. Прямые AC и EF пересекаются в точке X. Рассмотрим треугольники AEX для всех пар точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

Задача 10.4. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих стороны четырёхугольника $ABCD$, лежит на отрезке EF.

Задача 10.5. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

Задача 10.6. а) Докажите утверждение, обратное теореме Симсона.

б) Докажите следующее обобщение. Дан треугольник ABC. Из точки P проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным[2]) углом к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

в) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

г) Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Задача 10.7. а) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворот вокруг точки A, переводящий первую окружность во вторую. Пусть C — произвольная точка первой окружности, C' — её образ при этом повороте. Докажите, что прямая CC' проходит через точку B.

---

[2] В данном случае имеется в виду следующее: перпендикуляры PP_a, PP_b и PP_c (см. рис. 10.2) повернули вокруг точки P на один и тот же угол в одном направлении. Если ввести понятие ориентированного угла, то с их помощью можно получить строгие доказательства без перебора случаев. Однако, это выходит за рамки данной книги.

б) **Прямая Штейнера.** Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P — точка его описанной окружности. Докажите, что образы P_a, P_b и P_c точки P при симметрии относительно сторон треугольника лежат на одной прямой, проходящей через H.

в) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

Задача 10.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — такие внутренние точки отрезков BC и AD соответственно, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые AC и EF пересекаются в точке R, прямые BD и EF пересекаются в точке Q. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

Ответы и решения

Задача 10.1. а) В равных окружностях равные вертикальные углы AKB и DKC опираются на равные дуги (см. рис. 10.3а). Следовательно, равны и соответствующие хорды, то есть $AB = CD$.

б) Углы MAK и MCK опираются на равные дуги, следовательно, треугольник AMC равнобедренный. Аналогично для треугольника BMD.

в) Равенство треугольников ABM и CDM по трём сторонам следует из п. а) и б).

г) Заметим, что $\angle MBK = \angle MAK = \frac{1}{2}\angle MO_1K = \angle MO_1O_2$, то есть в равнобедренных треугольниках BMD, AMC и O_1MO_2 равны углы при основании. Следовательно, равны и углы при вершине M.

д) Пусть $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2 = \alpha$. Рассмотрим поворот вокруг точки M на угол α.

Точка O_1 перейдёт в точку O_2, следовательно, первая окружность перейдёт во вторую. При этом точка B переходит в точку D, а точка A — в точку C.

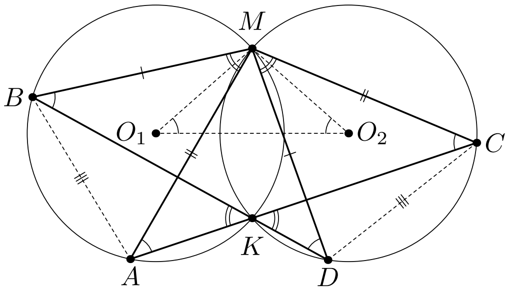


Рис. 10.3а

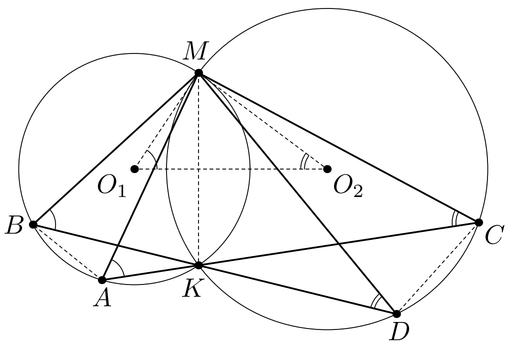


Рис. 10.3б

е) Заметим, что в случае неравных окружностей равенство углов BMD, AMC и O_1MO_2 доказывается так же, как и для равных (см. рис. 10.3б).

На самом деле мы это уже доказывали в задаче 9.2.

Рассмотрим композицию поворота вокруг точки M на угол O_1MO_2 и гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $\frac{R_2}{R_1}$ (R_1 и R_2 — радиусы окружностей).

При таком преобразовании первая окружность перейдёт во вторую, а поскольку $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$, то и треугольник ABM перейдёт в треугольник CDM, что и требовалось.

Задача 10.2. Поскольку M — точка Микеля для данных прямых, она принадлежит описанным окружностям треугольников BCE и DCF.

а) Равные вертикальные углы BCE и DCF опираются в окружностях на равные хорды, следовательно, эти окружности равны, что можно получить, например, из равенства соответствующих центральных углов или используя следствие из теоремы синусов (см. рис. 10.4а). Тогда осталось воспользоваться пунктом д) задачи 10.1 для треугольников MBE и MFD.

б) Утверждение следует из задачи 10.1е).

в, г) Заметим, что точка Микеля M лежит на описанной окружности треугольника AED. Далее используем пункты а) и б).

На самом деле в п. в) и г) доказано следующее: по сторонам угла A с постоянными скоростями в разные стороны движутся точки D и E (см. рис. 10.4б). Тогда окружности, описанные около всех таких треугольников DAE, имеют общую точку. В случае, если скорости равные, эта точка является серединой дуги DE.

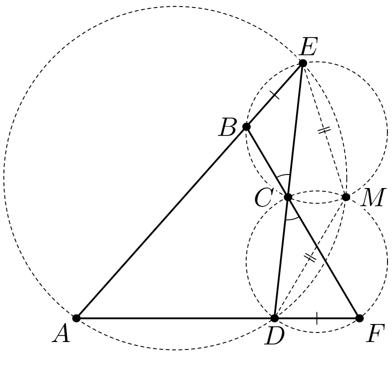


Рис. 10.4а

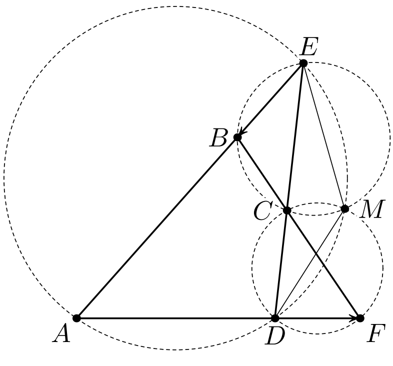


Рис. 10.4б

Задача 10.3. Пусть M — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABC и AEX (см. рис. 10.5). Тогда M — точка Микеля для прямых AB, BC, AC и EF.

Следовательно, M — середина дуги AC (см. задачу 10.2в), то есть она фиксирована.

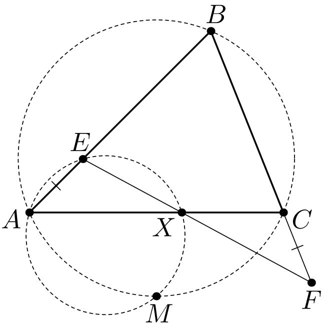


Рис. 10.5

Отметим, что в этой задаче мы также имеем дело с точками, двигающимися по сторонам угла с равными скоростями.

Задача 10.4. Точка Микеля M принадлежит окружностям, описанным вокруг треугольников BCE и DCF (см. рис. 10.6). Тогда четырёхугольники $BEMC$ и $DCMF$ вписанные, следовательно, $\angle EMC = \angle ABC$ и $\angle FMC = \angle ADC$. Поскольку по условию четырёхугольник $ABCD$ также вписанный, то $\angle EMC + \angle FMC = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, что и требовалось.

Отметим, что в итоге мы получили ту же самую конструкцию, что и в задаче 3.6.

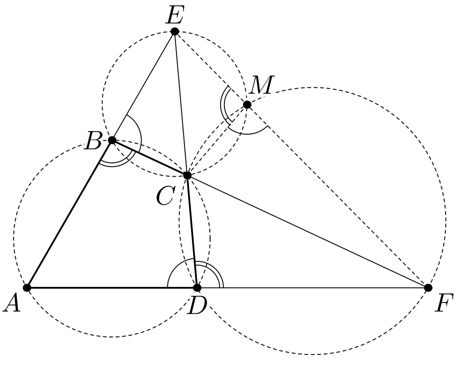


Рис. 10.6

Задача 10.5. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E, а BC и AD — в точке F. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — основания перпендикуляров, опущенных на прямые AB, CD, BC и AD (см. рис. 10.7). Точка Микеля M принадлежит описанным окружностям треугольников BCE и DCF. Применив теорему Симсона для этих треугольников и точки M, получим, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой и точки B_1, C_1 и D_1 также лежат на одной прямой, что и требовалось.

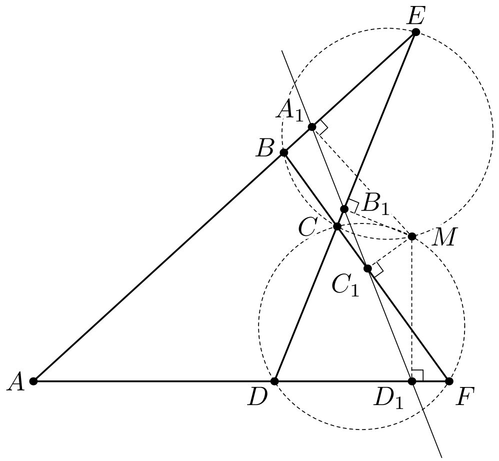


Рис. 10.7

Задача 10.6. а, б) Докажем сразу же п. б).

Заметим, что задача допускает несколько способов решения. Один из них практически аналогичен разобранному в тексте перед занятием. Мы же рассмотрим способ, использующий точку Микеля.

Пусть $\angle PEB = \angle PLC = \angle PFC$ (см. рис. 10.8а), следовательно, точка P лежит на описанных окружностях треугольников AEF и BLE. Если точки E, L и F лежат на одной прямой, то P — точка Микеля для прямых AB, BC, AC и EF, то есть она лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Обратно: пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, она лежит на описанной окружности треугольника AFE, то есть P — точка Микеля для прямых AB, BC, AC и EF. Следовательно, описанная окружность треугольника BEP содержит точку пересечения прямых EF и BC.

С другой стороны, эта окружность содержит точку L, принадлежащую прямой BC, то есть L — точка пересечения прямых EF и BC.

Отметим, что решение аналогично второму способу доказательства теоремы о прямой Симсона в начале занятия.

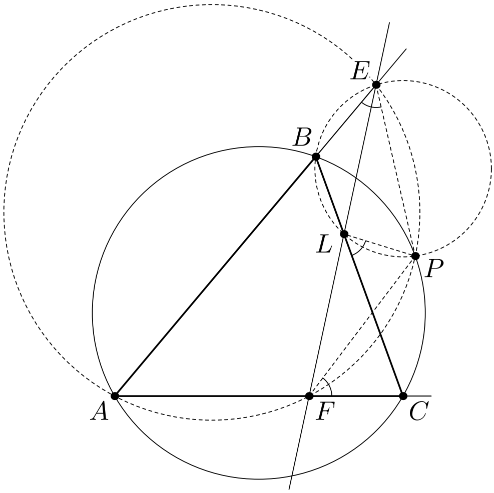


Рис. 10.8а

в) Пусть точки M, K и L — середины отрезков PA, PB и PC соответственно, а точки O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP и ACP (см. рис. 10.8б). Рассмотрим треугольник $O_1O_2O_3$, в котором точки M, K и L являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны (или на их продолжения). Так как точки M, K и L лежат на одной прямой, точка P лежит на окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$ (см. п. а)), что и требовалось.

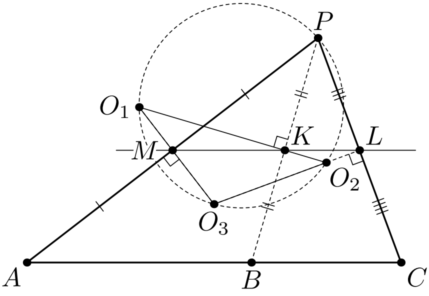


Рис. 10.8б

г) Рассмотрим четыре прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B, C, D, E и F (см. рис. 10.8в). Тогда на чертеже образуются четыре треугольника: ABF, ADE, BEC и CDF, описанные окружности которых пересекаются в точке M — точке Микеля. Три из этих четырёх окружностей являются описанными около треугольников AEM, ABM и BEM. Поэтому их центры лежат на одной окружности, проходящей через точку M (см. п. в)). Аналогично доказывается, что центры других трёх из данных окружностей лежат на одной окружности, проходящей через точку M. Следовательно, все четыре центра лежат на одной окружности, проходящей через точку M, что и требовалось.

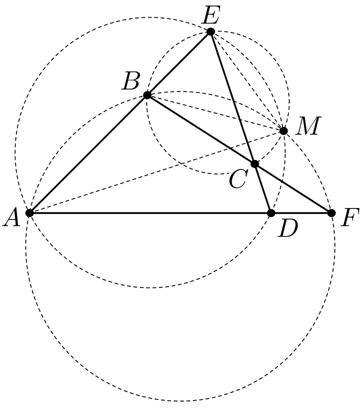


Рис. 10.8в

Задача 10.7. а) Пусть X — произвольная точка первой окружности (см. рис. 10.9а), а Y — точка пересечения прямой XB со второй окружностью. Тогда из пунктов г) и д) первой задачи следует, что Y — это образ точки X при повороте на угол O_1AO_2, равный углу XAY.

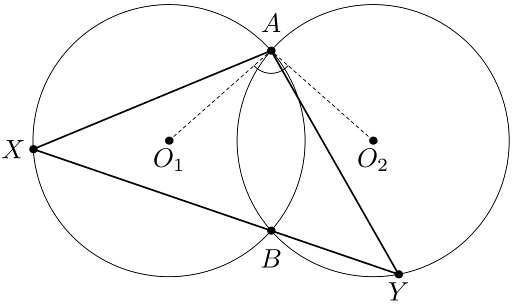


Рис. 10.9а

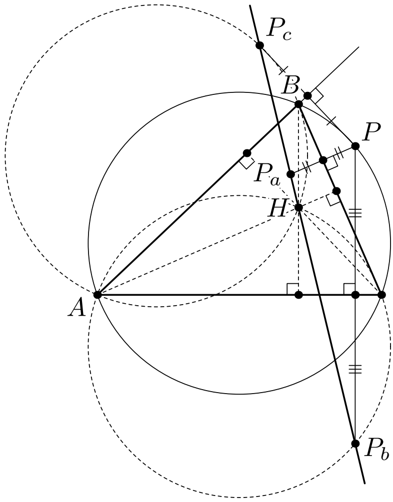


Рис. 10.9б

б) Для доказательства того, что точки лежат на одной прямой, достаточно использовать теорему о прямой Симсона и гомотетию с коэффициентом 2 и центром в точке P. Докажем, что точка H принадлежит рассматриваемой прямой (см. рис. 10.9б). Заметим, что при симметрии относительно прямой AB окружность w, описанная около треугольника ABC, переходит в окружность w_1, описанную около треугольника ABH (см. задачу 8.3). Аналогично при симметрии относительно прямой AC окружность w переходит в окружность w_2, описанную около треугольника AHC. Следовательно, P_c лежит на w_1, а P_b лежит на w_2. При композиции симметрий относительно AB и AC окружность w_1 переходит в w_2, а P_c переходит в P_b. Учитывая, что композиция этих симметрий является поворотом с центром в точке A, получим, что точки P_c, H и P_b лежат на одной прямой (см. п. а)).

в) Достаточно воспользоваться гомотетией с центром в точке P и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

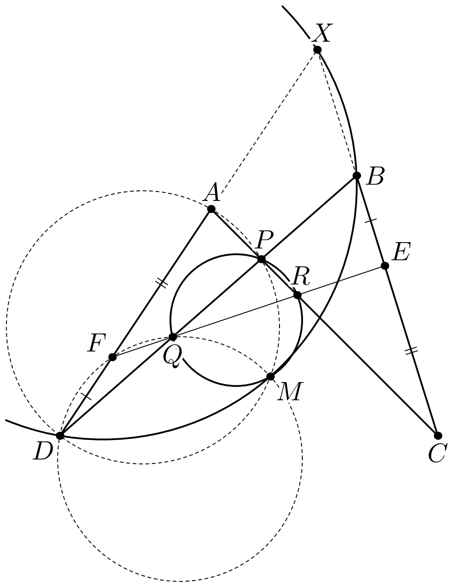


Рис. 10.10

Задача 10.8. Пусть X — точка пересечения прямых AD и BC (см. рис. 10.10), а M — середина дуги BD описанной окружности треугольника XBD. Рассмотрим прямые

XD, XB, BD и AC. Так как $AD = BC$, то M — точка Микеля для этих прямых (см. задачу 10.3), то есть лежит на описанной окружности треугольника APD. Аналогично M является точкой Микеля для прямых XB, XD, BD и EF, то есть лежит на описанной окружности треугольника DFQ. Рассмотрев теперь прямые AC, AD, PD и FR, получим, что M — точка Микеля для этих прямых, то есть лежит на окружности, описанной около треугольника PQR.

Можно также использовать задачи Д41, Д85–Д97.

Приложение

Антипараллельность

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC. Говорят, что отрезки B_1C_1 и BC *антипараллельны* (относительно пары прямых AB и AC или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$. Возможны различные случаи расположения антипараллельных отрезков (см. рис. 1а–г).

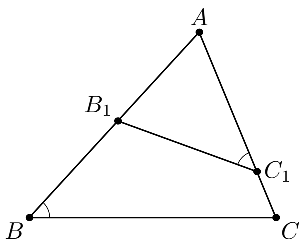


Рис. 1а

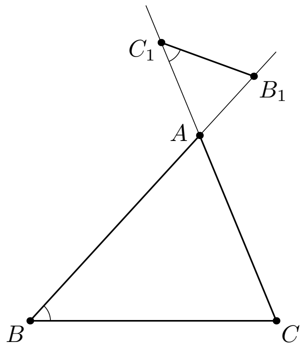


Рис. 1б

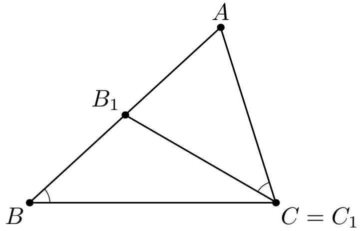


Рис. 1в

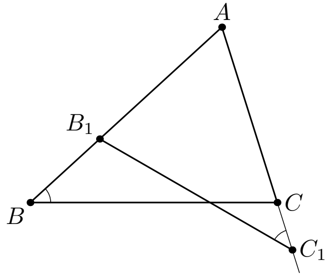


Рис. 1г

Отметим, что использование понятия «антипараллельность» позволяет для целого класса задач давать **полные решения без перебора случаев** (этот перебор уже «спрятан» в определении понятия).

Факт 1. Свойство и признак вписанного четырёхугольника. *Пусть* B_1, C_1, B и C *— различные точки. Отрезки* BC и B_1C_1 *антипараллельны тогда и только тогда, когда* B_1, C_1, B *и* C *лежат на одной окружности.*

Факт 2. *Пусть* B' *и* C' *— такие точки на прямых* AB *и* AC, *что отрезки* $B'C'$ *и* BC *параллельны. Отрезки* $B'C'$ *и* B_1C_1 *антипараллельны тогда и только тогда, когда отрезки* BC *и* B_1C_1 *антипараллельны* (*см. рис.* 2).

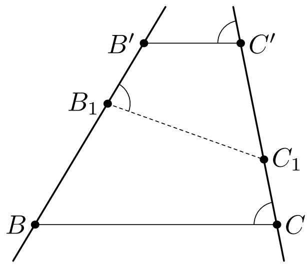


Рис. 2

Факт 3. *Отрезки* BC *и* B_1C_1 *антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники* ABC *и* AC_1B_1 *подобны* (*иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла* A *и затем гомотетию с центром в точке* A (*см., например, рис.* 3).

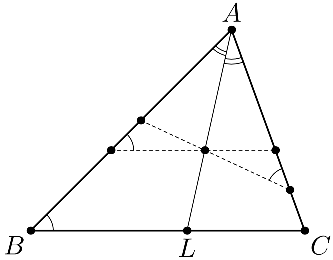


Рис. 3

Из факта 3 следуют два полезных утверждения.

Утверждение 1. *Если в треугольнике ABC отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны, то высота треугольника B_1AC_1 содержит точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.*

Для доказательства, помимо факта 3, можно использовать угол между радиусом и стороной.

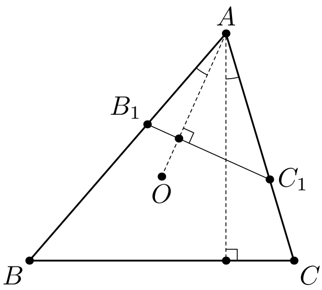


Рис. 4

Утверждение 2. *Медиана в треугольнике ABC является* ***симедианой*** *(прямой, симметричной медиане относительно биссектрисы) в треугольнике AB_1C_1 и наоборот (см. рис. 5).*

Аналогичное утверждение можно сформулировать для любой чевианы треугольника.

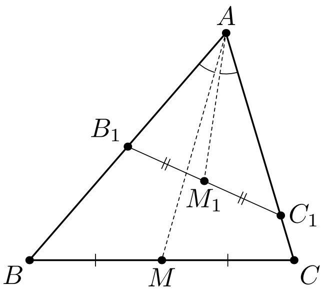


Рис. 5

Приложение

Дополнительные задачи

Задача Д1. Даны окружность и точка A. Найдите геометрическое место середин хорд, высекаемых данной окружностью на всевозможных прямых, проходящих через точку A.

Задача Д2. а) Даны две точки A и B. Найдите ГМТ оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые, проходящие через точку B.

б) Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.

Задача Д3. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

Задача Д4. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.

Задача Д5. Из точки M, лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D. Докажите, что точки M, A, B, C и D расположены на одной окружности.

Задача Д6. Две окружности пересекаются в точках A и B, AM и AN — диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

Задача Д7. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, высекает на двух других сторонах равные отрезки. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Задача Д8. Отрезок AB — диаметр окружности, BC — касательная. Секущая AC делится окружностью в точке D пополам. Найдите угол DAB.

Задача Д9. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите диаметр этой окружности.

Задача Д10. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место таких точек M, что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

Задача Д11. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

Задача Д12. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой из этого угла.

Задача Д13. Через одну из точек пересечения двух равных окружностей проведена общая секущая. Докажите, что отрезок этой секущей, заключённый между окружностями, делится пополам окружностью, построенной на общей хорде этих окружностей как на диаметре.

Задача Д14. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN — его высоты, а точка Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ равносторонний.

Задача Д15. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана точка M. Через эту точку проведён перпендикуляр к прямой CM, который пересекает сторону AD в точке E. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CE. Найдите угол APB.

Задача Д16. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены равные прямоугольники $ABMN$ и $LBCK$ так, что $AB = KC$.

Докажите, что прямые AL, NK и MC пересекаются в одной точке.

Задача Д17. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB опущен перпендикуляр MN. Докажите, что $\angle MAN = \angle MCN$.

Задача Д18. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle BCA = 35^\circ$, $\angle BDC = 40^\circ$, $\angle BDA = 70^\circ$. Найдите угол между диагоналями этого четырёхугольника.

Задача Д19. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

Задача Д20. Внутри треугольника ABC, в котором $\angle C = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, взята точка M так, что треугольник CMB равносторонний. Найдите $\angle MAB$ и $\angle MAC$.

Задача Д21. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием и высотой, опущенной на это основание, наибольшую величину противолежащего угла имеет равнобедренный треугольник.

Задача Д22. У вписанного пятиугольника $ABCDE$ стороны BC и CD равны. AC пересекает BE в точке N, AD пересекает CE в точке M. Докажите, что $MN \parallel BD$.

Задача Д23. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P. Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.

Задача Д24. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ тогда и только тогда, когда $AC = BC$.

Задача Д25. В параллелограмме $ABCD$ взята такая точка Q, что $\angle ABQ = \angle ADQ$. Докажите, что $\angle DAQ = \angle DCQ$.

Задача Д26. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана такая точка M, что $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите величину угла ABM.

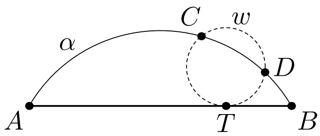
Задача Д27. Вокруг треугольника ABC описана окружность, и через точки A и B проведены касательные, которые пересекаются в точке M. Точка N лежит на стороне BC, причём прямая MN параллельна стороне AC. Докажите, что $AN = NC$.

Задача Д28*. Дан выпуклый четырёхугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$. Докажите, что MA — биссектриса угла BMC.

Задача Д29. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.

Задача Д30. Окружность S_2 проходит через центр O окружности S_1 и пересекает её в точках A и B. Через точку A проведена касательная к окружности S_2. Точка D — вторая точка пересечения этой касательной с окружностью S_1. Докажите, что $AD = AB$.

Задача Д31. На отрезке AB построена дуга α (см. рисунок). Окружность ω касается отрезка AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Лучи AC и TD пересекаются в точке E, лучи BD и TC — в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.



Задача Д32. Две окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках A и B. К ним через точку A проводятся касательные l_1 и l_2 (соответственно). Перпендикуляры, опущенные из точки B на l_2 и l_1, вторично пересекают окружности w_1 и w_2 соответственно в точках K и N. Докажите, что точки K, A и N лежат на одной прямой.

Задача Д33. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Касательные к S_1 и S_2 в точке A пересекают отрезки BO_2 и BO_1 в точках K и L соответственно. Докажите, что $KL \parallel O_1O_2$.

Задача Д34. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке D. Прямая касается одной из этих окружностей в точке A и пересекает другую в точках B и C. Докажите, что точка A равноудалена от прямых BD и CD.

Задача Д35. Точки касания вписанной в треугольник окружности соединены отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

Задача Д36. Окружность девяти точек (окружность Эйлера). Докажите, что в любом треугольнике середины всех сторон, основания всех высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.

Задача Д37. Лемма Архимеда. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Докажите, что MT — биссектриса угла AMB.

Задача Д38. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B. Окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

Задача Д39*. Из точки A к окружности ω проведены касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную точку (отличную от D).

Задача Д40. Отрезок AL — биссектриса треугольника ABC, K — точка на стороне AC, причём $CK = CL$. Прямая

LK и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.

Задача Д41. На биссектрисе данного угла фиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.

Задача Д42. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведённые из вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

Задача Д43. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в неё четырёхугольник и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стерли четырёхугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив её центр). Восстановите какую-нибудь из стёртых вершин четырёхугольника, пользуясь только линейкой и проведя не более шести линий.

Задача Д44*. Восстановите треугольник по точке пересечения высот и основаниям медианы и биссектрисы, проведённых к одной из сторон.

Задача Д45*. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40°, BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

Задача Д46. В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведёнными из двух вершин, и биссектрисой, проведённой из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

Задача Д47. Известно, что в четырёхугольник можно вписать и около него можно описать окружность. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью, взаимно перпендикулярны.

Задача Д48. Постройте треугольник ABC, зная три точки A_1, B_1 и C_1, в которых продолжения его биссектрис (высот) пересекают описанную окружность.

Задача Д49. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

Задача Д50. а) Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках K и L. Докажите, что точки A, K, L и центр I вписанной окружности треугольника ABC являются вершинами ромба.

б) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причём вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике, являющемся пересечением треугольников T_1 и T_2, диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

Задача Д51. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

Задача Д52. Определите углы треугольника, в котором медиана и высота, проведённые из одной вершины, делят угол на три равные части.

Задача Д53. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, в котором $\angle B = 60^\circ$. Окружности, описанные вокруг треугольников AHB и CHB, пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, C_1 и H лежат на одной прямой.

Задача Д54. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; D — середина стороны AC. Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку DH, пересекает стороны AB и BC в точках E и F. Докажите, что $HE = HF$.

Задача Д55. В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен 60°. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник.

Задача Д56. а) В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, а высоты CE и AD пересекаются в точке H. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на общей биссектрисе углов AHE и CHD.

б) В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным 60°, высоты пересекаются в точке H. Пусть M и N — точки пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AH и CH со сторонами AB и BC соответственно. Докажите, что точки M, N, H и центр O описанной окружности лежат на одной прямой.

Задача Д57. Восстановите треугольник ABC по двум точкам: его ортоцентру H и его центру вписанной окружности I, если известно, что угол A равен 60°, а радиус описанной окружности равен R.

Задача Д58. В треугольнике ABC угол B равен 60°, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, BM — медиана, L — середина OB. Докажите, что $LM \perp OH$.

Задача Д59*. Докажите, что если прямая Эйлера проходит через центр вписанной окружности треугольника, то треугольник равнобедренный.

Задача Д60. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

Задача Д61. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

Задача Д62. В треугольнике ABC: $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Пусть M — середина BC, H — ортоцентр. Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC.

Задача Д63. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Окружности ω и ω_1, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P. Докажите, что:

а) точки M (середина AB), H (ортоцентр треугольника ABC) и P лежат на одной прямой;

б) окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точку P.

Задача Д64*. Прямая, соединяющая центр описанной окружности и ортоцентр неравнобедренного треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

Задача Д65. В треугольнике ABC: $\angle B = 60^\circ$, BL — биссектриса, O — центр описанной окружности. Описанная окружность треугольника BOL вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что $BD \perp AC$.

Задача Д66. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Задача Д67. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную окружность — в точке M.

а) Докажите, что центры описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой.

б) Пусть O_A и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AMK и CMK соответственно. Докажите, что прямые AO_A и CO_C пересекаются на прямой, содержащей высоту треугольника ABC.

Задача Д68. Чевиана AA_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2. Точка O' — центр описанной окружности треугольника BA_1A_2. Докажите, что $O'A_1 \perp AC$.

Задача Д69. Биссектриса AA_1 пересекает описанную окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) в точке A_2. Точка I — инцентр. Докажите, что центр описанной окружности треугольника IBA_2 лежит на стороне BC.

Задача Д70. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Точки O_A и O_C — центры окружностей, описанных около треугольников AHB и CHB соответственно. Докажите, что $O_AO_C = AC$.

Задача Д71. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а I_a и I_c — центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника II_aI_c. Докажите, что $OI \perp AC$.

Задача Д72. Дан треугольник ABC. На стороне AC выбираются произвольная точка K и такая точка L (отличные от A и C), что $\angle ABK = \angle CBL$. Докажите, что центры описанных окружностей всех таких треугольников KBL лежат на одной прямой.

Задача Д73. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, B и O_2, пересекает вторую окружность также и в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

Задача Д74. Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1, O_2 и A, вторично пересекает окружность S_1 в точке D, окружность S_2 — в точке E, а прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

Задача Д75. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке M_1, а вторую — в точке M_2. Докажите, что $\angle BO_1M_1 = \angle BO_2M_2$.

Задача Д76. Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй — в точке D. Пусть B — ближайшая к прямой CD точка пересечения окружностей. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E. Докажите, что AD — биссектриса угла CAE.

Задача Д77. Криволинейный многоугольник — это многоугольник, стороны которого — дуги окружностей. Существуют ли такой криволинейный многоугольник P и такая точка A на его границе, что любая прямая, проходящая через точку A, делит периметр многоугольника на два куска равной длины?

Задача Д78. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A пересекает окружность S_2 в точке K_2, а прямая O_2A пересекает окружность S_1 в точке K_1. Докажите, что $\angle O_1O_2A = \angle K_1K_2A$.

Задача Д79. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

Задача Д80*. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка P — отличная от A и B точка одной из окружностей, X и Y — вторые точки пересечения прямых PA и PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

Задача Д81. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC, а CD, AP и BQ — высоты. Пусть R — точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

Задача Д82. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

б) Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины CD.

в) Докажите, что прямая, проведённая из точки P перпендикулярно стороне BC, делит сторону AD пополам.

Задача Д83. Через вершины вписанного четырёхугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки пересечения касательных, проведённых через соседние вершины, являются вершинами вписанного четырёхугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

Задача Д84. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что середины сторон четырёхугольника лежат на одной окружности.

б) Докажите, что проекции точки P на стороны четырёхугольника (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны) лежат на той же окружности.

в) Докажите, что точка P является центром окружности, вписанной в четырёхугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны четырёхугольника $ABCD$.

г) Докажите, что стороны четырёхугольника, образованного проекциями точки P на стороны четырёхугольника $ABCD$ (см. п. б), в)), параллельны сторонам четырёхугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырёхугольника $ABCD$ (см. предыдущую задачу).

Задача Д85. Пусть W — середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из точки W на прямые AB и BC, проходит через середину отрезка AC.

Задача Д86. Окружность w, центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC треугольника ABC, касается стороны BC в точке A_0, а продолжения стороны AB за точку B — в точке C_0. Докажите, что прямая A_0C_0 проходит через середину стороны AC.

Задача Д87. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что:

а) основания перпендикуляров, опущенных из точки B_1 на прямые AB, BC, AA_1 и CC_1, лежат на одной прямой;

б) середина отрезка B_1C_1 лежит на этой прямой.

Задача Д88. Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, а вторая — продолжение стороны CD в точке L. Пусть F — точка пересечения отрезков KL и AC. Докажите, что $BF \perp KL$.

Задача Д89. Отрезки BH и BL — высота и биссектриса остроугольного треугольника ABC соответственно. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BL; Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на сторону BC. Докажите, что точки H, P и Q лежат на одной прямой.

Задача Д90*. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P. Докажите, что:

а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности;

б) $\angle EPO = 90^\circ$.

Задача Д91*. Центр O описанной окружности четырёхугольника $ABCD$ не лежит на диагоналях этого четырёхугольника. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F.

а) Докажите, что все шесть описанных окружностей треугольников ABF, CDF, BEC, ADE, BOD и AOC пересекаются в некоторой точке K.

б) Докажите, что точка K лежит на прямой EF, а прямые EF и OK перпендикулярны.

Задача Д92. а) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки B и I, пересекает AB и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

б) На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

в) Пусть P — произвольная точка на стороне AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно так, что $AP = AM$ и $CP = CN$. Перпендикуляры, проведённые в точках M и N к сторонам AB и BC соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что угол QIB равен 90°, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задача Д93. а) Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC,

K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

б) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB.

Задача Д94. а) Пусть M и N — точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы внешнего угла A с прямой MN. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

б) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB.

Задача Д95. а) Пусть M и N — точки касания вневписанной окружности со стороной AC и продолжением стороны BC треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы внешнего угла A с прямой MN. Докажите, что $\angle AKB = 90^\circ$.

б) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC.

Задача Д96. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

Задача Д97*. В треугольнике ABC угол B равен 60°. Пусть AA_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1, лежит на стороне AC.

Задача Д98. Окружность Конвея. На продолжениях сторон CA и BA за точку A отложим отрезки AB_1 и AC_2, равные стороне BC. Аналогично построим точки B_2 и A_1, A_2 и C_1. Докажите, что все построенные таким образом точки лежат на одной окружности.

Задача Д99. Пусть A_1 и A_2 — проекции точки A на биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC. Точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны и все эти точки лежат на одной окружности.

Задача Д100*. Окружность Тейлора. Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC; A_1 и A_2 — проекции точки H_1 на прямые AB и AC. Аналогично определим точки B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны и антипараллельны сторонам треугольника, а все эти точки лежат на одной окружности.

Задача Д101. Рассмотрим четыре сегмента, отсекаемые от окружности вписанным в неё четырёхугольником и расположенные вне этого четырёхугольника. Найдите сумму четырёх углов, вписанных в эти сегменты.

Задача Д102. С помощью циркуля и линейки постройте параллелограмм по углу и диагоналям.

Задача Д103. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане, проведённой к другой стороне (исследование вопроса о количестве решений не требуется).

Задача Д104. На плоскости нарисована прямая MN и не пересекающий её отрезок AB. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой точку, из которой отрезок виден под наибольшим углом.

Задача Д105. Восстановите параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина стороны AD.

Задача Д106. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены круги. Покроют ли они весь четырёхугольник?

Задача Д107. Из некоторой точки внутри квадрата две его противоположные стороны видны под прямыми углами. Докажите, что данная точка — центр квадрата.

Ответы и указания

Д1. Ответ: 1) если точка лежит на окружности, то задача эквивалентна примеру 1.4;

2) если точка лежит внутри окружности, то ответом является окружность, построенная на отрезке OA как на диаметре;

3) если точка лежит вне окружности, то ответом является дуга окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре, лежащая внутри данной окружности.

Указание. Вспомните пример 1.4.

Д2. Ответ: а) окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре; б) окружность с центром в точке B и радиусом AB.

Указание. а) Используйте ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (утверждение 3 занятия 1).

б) Используйте тот факт, что если точки симметричны относительно прямой, проходящей через точку B, то они равноудалены от B. Также можно воспользоваться результатом пункта а) и средней линией треугольника или гомотетией.

Д3. Ответ: 90°, 45°, 45°.

Докажите, что медиана, проведённая к гипотенузе, является высотой.

Д4. В равностороннем треугольнике медианы совпадают с высотами.

Д5. Используйте ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (утверждение 3 занятия 1).

Д6. Задача аналогична задаче 1.3.

Д7. Докажите равенство прямоугольных треугольников.

Д8. Ответ: 45°.

Задача аналогична задаче Д3.

Д9. Ответ: 20.

Используйте среднюю линию треугольника.

Д10. Ответ: окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, исключая точку A, где B — точка, симметричная A относительно диаметрально противоположной ей точки окружности.

Указание. Рассмотрите точку B, симметричную точке A относительно диаметрально противоположной ей. Вспомните пример 1.4.

Д11. Ответ: 60° и 120°.

Рассмотрите середину отрезка AD и воспользуйтесь свойством медианы прямоугольного треугольника.

Д12. Задача и её решение аналогичны решению задачи 1.2. Используйте ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом (см. задачу 2.7), и ГМТ, удалённых от данной прямой на данное расстояние.

Д13. Пусть окружности пересекаются в точках M и K, а AB — отрезок секущей, проведённой через точку M. Докажите, что треугольник AKB равнобедренный.

Д14. Рассмотрите окружность с центром Q, проходящую через точки A, N, M и C. Далее используйте теорему о вписанном угле.

Д15. Ответ: 90°.

Используйте тот факт, что точки B, C, P и M, а также точки A, M, P и E лежат на одной окружности.

Д16. Пусть X — вторая точка пересечения окружностей, описанных около данных прямоугольников. Докажите, что она принадлежит всем трём прямым.

Д17. Точки A, C, M и N лежат на одной окружности.

Д18. Ответ: 75°.

Докажите, что точка D является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

Д19. Ответ: $\sqrt{4p^2 - q^2}$.

Используйте тот факт, что точка D является центром окружности, описанной около треугольника ABC. Далее рассмотрите точку, диаметрально противоположную точке C, и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Д20. Ответ: $\angle MAB = 20^\circ$, $\angle MAC = 10^\circ$.

Докажите, что точка M является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

Д21. Пусть AB — данное основание. Рассмотрите равнобедренный треугольник ABC, удовлетворяющий условию, и описанную вокруг него окружность. Далее воспользуйтесь утверждением задачи 2.7.

Д22. Используя тот факт, что равные хорды стягивают равные дуги, докажите, что точки A, N, M и E лежат на одной окружности.

Д23. Используйте тот факт, что точки A, C, B и P лежат на одной окружности, причём угол BAC постоянен для любого положения точки C.

Д24. Используйте тот факт, что точки A, B, A_1 и B_1 лежат на одной окружности, и свойство средней линии треугольника.

Д25. Пусть при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AD}$ образом точки Q является точка Q'. Докажите, что точки D, C, Q и Q' лежат на одной окружности.

Д26. Ответ: $90^\circ - 2\alpha$.

Используя угол между радиусом и стороной, докажите, что B является центром окружности, описанной около треугольника ACM.

Д27. Используя теорему об угле между касательной и хордой, докажите, что точки A, B, N и M лежат на одной окружности.

Д28*. Рассмотрите центр O окружности, описанной около треугольника ACM. Найдите угол OAM (между радиусом и стороной). Далее используйте равенство треугольников.

Д29. Рассмотрите окружность, описанную около данного семиугольника. Отрезки A_1A_2 и A_3A_6 антипараллельны относительно прямых A_1Y и A_2X. Поэтому достаточно доказать антипараллельность отрезков A_3A_6 и XY относительно тех же прямых. Используйте угол между секущими.

Д30. Треугольники AOB и AOD равнобедренные. Используя угол между касательной и хордой, докажите их равенство.

Д31. Поскольку AB — антипараллель к CD относительно прямых TE и TF, достаточно доказать антипараллельность отрезков CD и EF относительно тех же прямых. Используйте угол между касательной и хордой, а также то, что $\angle ACD + \angle ABD = 180^\circ$.

Д32. Подсчётом углов докажите, что угол KAN — развёрнутый. Для этого проведите отрезок AB и используйте угол между касательной и хордой.

Д33. Используя угол между касательной и хордой, а также сумму углов треугольника, докажите, что четырёхугольник $ALBK$ вписанный.

Д34. Пусть B лежит на отрезке AC, а F — вторая точка пересечения прямой CD с первой окружностью. Докажите, что DA — биссектриса угла BDF. Для этого достаточно провести общую касательную к данным окружностям в точке D и использовать угол между касательной и хордой.

Также можно найти вторую точку пересечения AD со второй окружностью и использовать гомотетию двух данных окружностей.

Д35. Утверждение задачи следует из задачи 5.5.

Д36. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Можно доказать, что основания высот лежат на окружности, построенной на отрезке, соединяющем середину стороны AB и середину отрезка CH, как на диаметре. Для этого достаточно использовать, например, результат задачи 5.5б.

Комментарий. Центром этой окружности является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности, а радиус равен половине радиуса описанной окружности.

Д37. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения прямых MA и MB с меньшей окружностью. Проведя общую касательную к окружностям в точке M или используя гомотетию, докажите, что прямая A_1B_1 параллельна AB. Далее, используйте угол между касательной AB к меньшей окружности и её хордой. Также можно рассмотреть образ прямой AB и точки T при гомотетии, переводящей одну окружность в другую.

Д38. Рассмотрите точку D — вторую точку пересечения прямой AM и окружности S_2. Используя угол между касательной и хордой, докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

Д39*. Пусть AE — вторая касательная к окружности w, проведенная из точки A. Искомая точка M — середина отрезка DE. Используйте угол между касательной и хордой и основное свойство симедианы.

Д40. Докажите, что точки A, B, L и P лежат на одной окружности.

Д41. Ответ: биссектриса угла без его вершины и фиксированной точки, а также отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из фиксированной точки на стороны угла (без концов).

Указание. Рассмотрите два случая: симметричных точек и не симметричных. Для второго случая используйте признак вписанного четырёхугольника (см. занятие 6), а также вспомогательные окружности или теорему о прямой Симсона (см. занятие 10).

Д42. Ответ: 90°; 22,5°; 67,5°.

Используйте результат задачи 6.6.

Д43. Если на чертеже сохранилась, например, вершина A, то можно восстановить противолежащую вершину C. Для этого достаточно провести три линии. Используя тот факт, что биссектриса делит дугу пополам (см. занятие 6), постройте середины дуг BD, а затем искомую вершину.

Д44*. Пусть C_0 и C_1 — основания медианы и биссектрисы, проведённых из вершины C треугольника ABC, а H — его ортоцентр. Тогда точки P и Q, симметричные H относительно прямой AB (то есть прямой C_0C_1) и точки C_0, лежат на описанной около треугольника окружности, причем CQ — диаметр (см. пример 8.2 и задачу 8.6). Далее используйте, например, тот факт, что середина W дуги AB лежит на пересечении серединного перпендикуляра к отрезку AB и биссектрисы CC_1 (см. занятие 6), и ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (см. занятие 1).

Д45*. Отметьте на стороне BC такую точку E, что $BE = BD$ и докажите, что четырёхугольник $BADE$ вписанный. Далее используйте тот факт, что биссектриса делит дугу пополам.

Д46. Воспользуйтесь результатом задачи 7.7 и восстановите одну из вершин треугольника. Далее, используя тот факт, что биссектриса делит дугу пополам (см. занятие 6), восстановите точку пересечения описанной окружности и высоты треугольника.

Д47. Используйте свойство вписанного четырёхугольника (см. занятие 3) и величину угла между хордами (см. занятие 7).

Д48. Воспользуйтесь результатом задачи 7.7.

Д49. Пусть E — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Используйте тот факт, что стороны полученного четырёхугольника перпендикулярны биссектрисам угла E (см. задачу 7.9).

Д50. а) Воспользуйтесь результатом задачи 7.4 и докажите, что точки A и I симметричны относительно прямой KL. Для доказательства достаточно использовать «лемму о трезубце» и перпендикулярность AI и KL (из формулы угла между хордами или непосредственно из задачи 7.7).

б) Воспользуйтесь результатом пункта а). Точка I — искомая.

Д51. Докажите перпендикулярность BB' и $A'C'$.

Первый способ. Докажите равенство дуг BA' и BC', используя антипараллельность A_1C_1 и AC и угол между хордами.

Второй способ. Используйте тот факт, что прямые BO и A_1C_1 перпендикулярны (см. задачу 8.4).

Д52. Ответ: $90°$, $60°$ и $30°$.

Используйте тот факт, что данный треугольник прямоугольный (задача 8.5).

Д53. Например, можно определить точку C_1 как точку пересечения AB и HA_1 и доказать, что $CHBC_1$ вписанный четырёхугольник.

Д54. Пусть K — точка, симметричная H относительно D. Далее воспользуйтесь результатом задачи 8.6 и тем, что четырёхугольники $AEHK$ и $KHFC$ вписанные.

Д55. Воспользуйтесь ортоизогональю (пример 8.1), утверждением из примера 8.3 и тем, что эта прямая проходит через ортоцентр треугольника (теорема о прямой Эйлера). Доказать, что рассматриваемая прямая отсекает равносторонний треугольник именно от треугольника, а не от угла, можно, например, используя результат задачи Д56.

Д56. Утверждения следуют из предыдущей задачи.

Д57. Воспользуйтесь утверждением из примера 8.3 и результатом задач 8.2 и 8.7.

Д58. Используйте тот факт, что если $\angle B = 60°$, то

1) четырёхугольник $BOWH$ — ромб, где W — середина дуги AC, не содержащей точки B;

2) точки W и O симметричны относительно AC.

Д59*. Используйте ортоизогональ и свойство биссектрисы для треугольников OCH и OBH, где O и H — центр описанной окружности и ортоцентр соответственно.

Д60. Используйте ортоизогональ.

Д61. Ответ: 60°, 45°, 75°.

Из условия следует, что угол A равен 60° (см. пример 8.3 или решение задачи 8.7).

Д62. Пусть BB_1 — высота, а точка O — центр описанной окружности. Докажите, что W (середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки C), O и B_1 лежат на одной прямой. Далее используйте тот факт, что точки O и H, а также M и основание высоты, проведённой из точки B, симметричны относительно прямой CW (см. пример 8.3). Также можно рассмотреть точку, симметричную H относительно M (задача 8.6).

Д63. а) Воспользуйтесь результатом задачи 8.6 и тем, что CH — диаметр окружности ω_1.

б) Докажите, что PM — биссектриса угла APA_1. Можно использовать результат пункта а), ортоизогональ и равенство вписанных углов. Далее воспользуйтесь признаком вписанного четырёхугольника из занятия 6.

Д64*. **Ответ:** 120°.

Докажите сначала, что рассматриваемый треугольник тупоугольный, воспользовавшись ортоизогональю. Далее, пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда, продлив биссектрису угла B из условия до пересечения с описанной окружностью, докажите, что отрезок BH равен радиусу описанной окружности. Далее используйте пример 8.3.

Д65. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, а D — вторая точка пересечения прямой BH с описанной окружностью этого треугольника. Докажите, что B, O, L и D лежат на одной окружности, используя признак вписанного четырёхугольника из занятия 6. Для этого можно использовать, что точки O и H симметричны относительно BL

(см. пример 8.3 или решение задачи 8.7), а точки H и D симметричны относительно AC (см. пример 8.2), то есть $OL = DL$ и $\angle OBL = \angle DBL$.

Не забудьте рассмотреть случай тупоугольного треугольника.

Д66. Используйте ортоизогональ или угол между радиусом и стороной.

Д67. а) Используйте угол между радиусом и стороной и то, что угол AMK фиксирован.

б) Используйте пункт а). Искомая точка лежит на описанной окружности треугольника.

Д68. Используйте угол между радиусом и стороной и равенство вписанных углов.

Д69. Используйте угол между радиусом и стороной и равенство вписанных углов.

Д70. Используйте тот факт, что центры данных окружностей симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно соответствующих сторон (см. решение задачи 8.3). Также можно использовать угол между радиусом и стороной и равенство радиусов окружностей (задача 8.3).

Д71. Используйте угол между радиусом и стороной и тот факт, что точки A, C, I_a, I_c лежат на одной окружности.

Д72. Используйте тот факт, что высоты треугольников KBL и ABC, проведённые к стороне AC, совпадают и ортоизогональ (см. занятие 8). Можно доказать, что ГМТ таких центров — интервал OT, где O — центр описанной окружности, а T — точка пересечения серединного перпендикуляра к биссектрисе угла B с прямой BO.

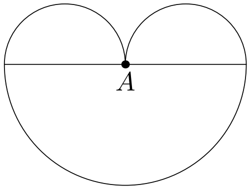
Д73. Пусть O_1A пересекает вторую окружность в точке P. Докажите, что четырёхугольник O_1PO_2B вписанный. Отметим, что окружность из условия задачи — это результат задачи 9.5.

Д74. Используйте результат предыдущей задачи и свойство вписанного четырёхугольника.

Д75. Используйте теорему о вписанном угле.

Д76. Можно использовать результат задачи 5.2.

Д77. Да, существует. Один из примеров состоит из полуокружности радиуса 2 и двух полуокружностей радиуса 1 (см. рисунок). Для доказательства используйте связь между длиной дуги и её угловой мерой.



Д78. Используя равенство углов при основании двух равнобедренных треугольников, докажите, что четырёхугольник $O_1O_2K_2K_1$ вписанный.

Д79. Проведите PQ и используйте тот факт, что биссектриса делит дугу пополам.

Д80*. Одна из точек пересечения данной прямой со второй окружностью является центром окружности, описанной около треугольника PXY. Воспользуйтесь ортоизогональю и результатом задачи 9.9.

Д81. Проведите касательную в точке Q к окружности, описанной около треугольника CPQ, и докажите, что она является касательной к другой окружности. Используйте антипараллельность BC и DQ и угол между касательной и хордой.

Комментарий. Эта касательная проходит через середину стороны AB (задача 5.5б).

Д82. а) Используйте тот факт, что вписанный угол равен половине центрального, или угол между радиусом и стороной.

б) Используйте пункт а) и равенство прямоугольных треугольников.

в) Используйте равенство вписанных углов.

Д83. Используйте пункт а) предыдущей задачи.

Д84. а) Докажите, что они являются вершинами прямоугольника.

б) Используйте пункт а) и пункт в) задачи Д82.

в) Используйте вписанные четырёхугольники с противолежащими прямыми углами или антипараллельность сторон получившегося четырёхугольника диагоналям исходного четырёхугольника.

г) Используйте угол между касательной и хордой или антипараллельность из предыдущего пункта.

Комментарий. На самом деле эти четырёхугольники гомотетичны, причём центр гомотетии лежит на OP!

Д85. Используйте теорему о прямой Симсона для точки W и прямых, содержащих стороны треугольника ABC.

Д86. Используя утверждение занятия 6 о пересечении серединного перпендикуляра и биссектрисы внешнего угла треугольника, докажите, что центр окружности лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Далее воспользуйтесь теоремой о прямой Симсона.

Д87. а) Рассмотрите сначала проекции точки B_1 на прямые AB, BC, AA_1 и используйте теорему о прямой Симсона. Для прямых AB, BC и CC_1 доказательство аналогично.

б) Рассмотрите прямоугольник с диагональю B_1C_1.

Д88. Используйте теорему о прямой Симсона для точки B и прямых, содержащих стороны треугольника DLK.

Д89. Используйте теорему о прямой Симсона для точки L и прямых BC, BH и AP или для точки B и прямых AL, AP и QL.

Д90*. а) Выразите углы APD и AOD через угол ABD. Также можно использовать тот факт, что P — точка Микеля для прямых AC, BD, AB и CD.

б) Используя пункт а) и угол между радиусом и стороной, выразите углы OPA и APE через угол ABD.

Д91*. а) K — точка Микеля для прямых AC, BD, AB и CD. Далее, используя угол между секущими и равенство вписанных углов, можно доказать, что $\angle BOD + \angle BKD = 180^\circ$.

б) По задаче 10.4 точка K лежит на прямой EF. Далее используйте пункт а) и представьте углы OKE и OKF в виде сумм соответственно равных углов.

Комментарий к задачам Д90 и Д91. Пусть S — точка пересечения прямых AC и BD. Тогда точка P из задачи Д90 лежит на прямых ES и OF, а точка K из задачи Д91 — на прямой OS. Это следует из того, что прямая ES является полярой точки F, а прямая EF — полярой точки S. Таким образом, задачи Д90 и Д91 эквивалентны, а в случае вписанного четырёхугольника точку Микеля можно определить, используя понятие поляры.

Подробнее о полярном соответствии, см. например, Я. П. Понарин, «Элементарная геометрия. Том 1. Планиметрия».

Д92. а) Используйте тот факт, что биссектриса делит дугу пополам, а также теорему о прямой Симсона для точки I. Также можно использовать тот факт, что точка I — точка Микеля для прямых BE, BF, EF и A_0C_0 (задача 10.2в).

б) Докажите, что точки B, E, F и I лежат на одной окружности, и используйте пункт а).

в) Точки M и N — это точки E и F из пунктов а) и б). Точки Q, M, N и B лежат на одной окружности, то есть перпендикуляры пересекаются на окружности из пункта а).

Д93. а) Пусть I — центр вписанной окружности. Возможны различные способы.

1. Докажите, что точки I, K, M и C лежат на одной окружности. Для этого достаточно доказать равенство углов MKA и MCI или что их сумма равна 180° (в зависимости от расположения точек).

2. Если определить точку K как проекцию C на биссектрису угла A, то достаточно будет доказать, что она лежит на прямой MN. Это можно сделать, используя теорему о прямой Симсона: пусть L — точка пересечения CK и AB, тогда точка I лежит на описанной окружности треугольника CBL как точка пересечения серединного перпендикуляра и биссектрисы (см. занятие 6).

б) Рассмотрите точку K как проекцию C на биссектрису угла A и проведите через K прямую, параллельную AB. Далее докажите, что она проходит через середину стороны AC.

Д94. Решение аналогично предыдущей задаче, только вместо точки I — центра вписанной окружности мы рассматриваем точку I_B — центр вневписанной окружности.

Д95. Решение аналогично решению задачи Д93, только вместо точки I — центра вписанной окружности мы рассматриваем точку I_B — центр вневписанной окружности.

При решении, использующем прямую Симсона, точка I_B определяется как точка пересечения серединного перпендикуляра к BL и биссектрисы внешнего угла C (см. указание к задаче Д93) и лежит на описанной окружности треугольника CBL (см. занятие 6).

Комментарий. Заметим, что задачи Д95 и Д94 есть вариации задачи Д93 для случая вневписанных окружностей. Задача Д93 получила название «задача 255» по её номеру в задачнике И. Ф. Шарыгина.

Д96. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Первый способ. Используйте утверждение занятия 6 о пересечении серединного перпендикуляра и биссектрисы внешнего угла треугольника и рассмотрите прямую Симсона для точки I и прямых BB_2, B_1K_1 и B_2K_2.

Второй способ. Воспользуйтесь «задачей 255».

Д97*. Пусть I — центр вписанной окружности. Воспользуйтесь тем, что точки B, A_1, C_1 и I лежат на одной окружности (пример 6.1). Далее можно рассуждать по-разному.

1. Если рассмотреть точку Микеля для прямых AB, BC, AA_1 и CC_1, то она лежит на прямой AC (задача 10.4). Докажите, что эта точка и есть искомая.

2. Если рассмотреть прямую Симсона точки B для треугольника IA_1C_1, то достаточно доказать, что она содержит среднюю линию треугольника ABC. Это следует, например, из «задачи 255».

Д98. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника равноудален от этих точек. Также можно использовать равнобокие трапеции.

Д99. Проекции вершины на внешние биссектрисы лежат на средней линии (см., например, задачу Д93). Далее покажите, что искомая окружность является окружностью Конвея для срединного треугольника.

Д100*. Для доказательства равенства отрезков воспользуйтесь следствием из теоремы синусов для треугольника AA_1A_2 и обратной пропорциональностью сторон и соответствующих высот.

Для доказательства антипараллельности достаточно использовать свойство вписанного четырёхугольника $AA_1H_1A_2$. Далее докажите, что четырёхугольники, образованные парами отрезков, например, A_1A_2 и B_1B_2, — равнобокие трапеции.

Также можно воспользоваться задачей Д99, поскольку стороны треугольника ABC содержат биссектрисы внешних углов треугольника $H_1H_2H_3$.

Д101. Ответ: 540°.

Воспользуйтесь свойством вписанного четырёхугольника или теоремой о вписанном угле в обобщённой форме (см. занятие 7).

Д102. Используйте ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом (см. задачу 2.7), и ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние.

Д103. Используя ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, постройте окружность, описанную около искомого треугольника, и её центр. Середину стороны постройте как пересечение двух ГМТ: из которых данный отрезок виден под прямым углом, и ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние. Дальнейшее построение очевидно.

Также можно использовать среднюю линию треугольника и то, что половина данной стороны видна из основания медианы под данным углом.

Д104. Рассмотрите окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся данной прямой. Искомая точка — точка касания. Для доказательства используйте задачу 2.7, а для построения воспользуйтесь подобием треугольников, которое следует из теоремы об угле между касательной и хордой.

Д105. Пусть в параллелограмме $ABCD$ точки K и L — середины высот BH и BP соответственно, а M — середина стороны AD. Восстановите вершину B. Для этого используйте тот факт, что $ML \perp BP$, ГМТ, из которых отрезок KM виден под прямым углом, и то, что точки H и B симметричны относительно точки K.

Д106. Ответ: да, покроют.

Воспользовавшись примером 1.2, докажите, что каждая точка четырёхугольника будет покрыта.

Д107. Используйте ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, для противоположных сторон квадрата. Докажите, что они пересекаются только в центре квадрата.

Рубрикатор задач

Д1. Занятия 1, 4.
Д2. Занятия 1, 4.
Д3. Занятие 1.
Д4. Занятие 1.
Д5. Занятия 1, 3.
Д6. Занятия 1, 9.
Д7. Занятие 1.
Д8. Занятие 1.
Д9. Занятие 1.
Д10. Занятие 1.
Д11. Занятие 1.
Д12. Занятие 2.
Д13. Занятие 9.
Д14. Занятия 2, 4.
Д15. Занятия 2, 3, 4.
Д16. Занятия 2, 3, 4.
Д17. Занятия 2, 3, 4.
Д18. Занятие 4.
Д19. Занятие 4.
Д20. Занятие 4.
Д21. Занятие 4.
Д22. Занятия 3, 4, 6.
Д23. Занятия 3, 4.
Д24. Занятия 3, 4.
Д25. Занятия 3, 4.
Д26. Занятие 4.
Д27. Занятия 4, 5.
Д28. Занятие 4.
Д29. Занятия 4, 7.
Д30. Занятия 5, 9.
Д31. Занятия 5, 9.
Д32. Занятия 5, 9.
Д33. Занятия 5, 9.
Д34. Занятие 5.
Д35. Занятия 5, 8.
Д36. Занятия 1, 5.
Д37. Занятия 5, 6.
Д38. Занятие 5.
Д39. Занятие 5.
Д40. Занятия 4, 6.
Д41. Занятия 4, 6, 10.
Д42. Занятия 6, 8.
Д43. Занятия 6, 7.
Д44. Занятия 6, 8.
Д45. Занятия 4, 6.
Д46. Занятия 6, 7.
Д47. Занятия 3, 7.
Д48. Занятие 7.
Д49. Занятие 7.
Д50. Занятие 7.
Д51. Занятия 7, 8.
Д52. Занятие 8.
Д53. Занятие 8.
Д54. Занятие 8.
Д55. Занятие 8.
Д56. Занятие 8.
Д57. Занятие 8.
Д58. Занятие 8.
Д59. Занятие 8.
Д60. Занятие 8.
Д61. Занятие 8.
Д62. Занятие 8.
Д63. Занятие 8.
Д64. Занятия 6, 8.
Д65. Занятия 6, 8.
Д66. Занятия 2, 3, 8.
Д67. Занятия 2, 3.
Д68. Занятия 2, 3, 8.
Д69. Занятия 2, 3, 6, 8.
Д70. Занятие 8.
Д71. Занятия 2, 3, 4.
Д72. Занятие 8.
Д73. Занятия 3, 9.
Д74. Занятия 3, 9.
Д75. Занятия 2, 9.
Д76. Занятия 5, 9.

Д77. Занятие 7.
Д78. Занятия 3, 9.
Д79. Занятия 6, 9.
Д80. Занятия 8, 9.
Д81. Занятие 5.
Д82. Занятия 2, 3.
Д83. Занятия 2, 3, 5.
Д84. Занятия 2, 3, 5.
Д85. Занятие 10.
Д86. Занятия 4, 6, 10.
Д87. Занятие 10.
Д88. Занятия 4, 10.
Д89. Занятия 4, 10.
Д90. Занятие 10.
Д91. Занятие 10.
Д92. Занятие 10.
Д93. Занятия 4, 6, 10.
Д94. Занятия 4, 6, 10.
Д95. Занятия 4, 6, 10.
Д96. Занятия 4, 6, 10.
Д97. Занятия 6, 10.
Д98. Занятие 3.
Д99. Занятие 3.
Д100. Занятие 3.
Д101. Занятия 2, 7.
Д102. Занятие 2.
Д103. Занятие 2.
Д104. Занятия 2, 5.
Д105. Занятие 2.
Д106. Занятия 1, 2.
Д107. Занятия 1, 2.

Раздаточный материал

Занятие 1. Вписанный угол, опирающийся на диаметр

Задача 1.1. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, расположенную вне окружности.

Задача 1.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

Задача 1.3. Докажите, что отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC треугольника как на диаметрах, лежит на прямой BC.

Задача 1.4. Даны окружность w и две точки M и K внутри неё. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

Задача 1.5. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность w, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Через точку D проведена касательная к окружности. Докажите, что она пересекает катет BC в его середине.

Задача 1.6. Пусть точка O — центр вписанной окружности, а точка O_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AB. Докажите, что точки A, B, O и O_1 лежат на одной окружности.

Задача 1.7. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB (одна в точке A, другая в точке B) и касаются друг друга в точке M. Найдите ГМТ M.

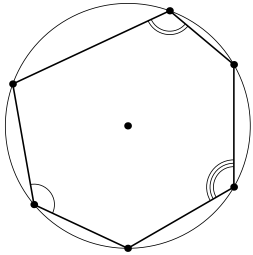
Занятие 2. Теорема о вписанном угле

Задача 2.1. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ADB равен 80°. Найдите угол CAB.

Задача 2.2. Точки A, B и C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности?

Задача 2.3. В окружность вписаны два угла: ACB и $A_1C_1B_1$. Докажите, что если они равны, то $AB = A_1B_1$. Верно ли обратное утверждение?

Задача 2.4. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, $\angle A = \alpha$. Найдите угол CBO.



Задача 2.5. Шестиугольник вписан в окружность. Найдите сумму углов при трёх его не соседних вершинах (см. рисунок).

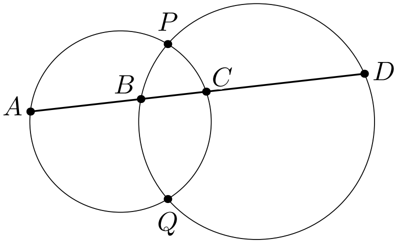
Задача 2.6. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность треугольник с двумя данными углами.

Задача 2.7. Пусть AB — хорда окружности, C — любая точка этой окружности, M лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и C. Докажите, что если точка M лежит внутри окружности, то угол AMB больше угла ACB, а если вне окружности, то меньше.

Задача 2.8. На окружности зафиксированы точки A и B, а точка C движется по одной из дуг AB. По какой траектории движется центр вписанной окружности треугольника ABC?

Задача 2.9. На хорде AB окружности с центром O взята точка C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

Задача 2.10. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D (см. рисунок). Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.



Занятие 3. Вписанный четырёхугольник

Задача 3.1. Точки A, B, C и D последовательно расположены на окружности, причём центр O окружности расположен внутри четырёхугольника $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков AB, BC, CD и AD соответственно. Докажите, что $\angle KON + \angle MOL = 180^\circ$.

Задача 3.2. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он — вписанный.

Задача 3.3. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

Задача 3.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AB = BC = CD$, M — точка пересечения диагоналей, K — точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

Задача 3.5. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне CD — точка L, на отрезке KL — точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC, лежит на диагонали AC.

Задача 3.6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки C', A', B'. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ проходят через одну и ту же точку.

Занятие 4. Вспомогательные окружности

Задача 4.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что $\angle A_1AC = \angle A_1C_1C = \angle A_1BH$.

Задача 4.2. Общая гипотенуза AB прямоугольных треугольников ABC и ABD имеет длину 5 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между точками C и D.

Задача 4.3. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Точка D находится от точки A на расстоянии a. Какие значения может принимать величина угла BDC?

Задача 4.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C тупые. Сравните длины диагоналей AC и BD.

Задача 4.5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ и $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD равносторонний.

Задача 4.6. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок AE пересекает сторону BC, причем $\angle BAE = 30^\circ$, а $\angle BCE = 75^\circ$. Найдите $\angle CBE$.

Задача 4.7. Равносторонние треугольники ABC и DFE расположены на плоскости так, что вершина B лежит внутри отрезка DE, а вершина F — внутри отрезка AC. Докажите, что у четырёхугольника, вершинами которого являются точки A, C, D и E, есть параллельные стороны.

Задача 4.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD, если $AB = 2$ см.

Занятие 5. Угол между касательной и хордой

Задача 5.1. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = EM$.

Задача 5.2. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

Задача 5.3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Задача 5.4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, M — середина AB. Окружность, описанная около треугольника AMA_1, пересекает прямую A_1B_1 в точке X. Докажите, что AX — касательная к описанной окружности треугольника ABC.

Задача 5.5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точка M — середина BC. Докажите, что:

а) касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1;

б) прямые MB_1 и MC_1 касаются описанной окружности треугольника AB_1C_1.

Задача 5.6. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

Задача 5.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведённой из вершины A.

Задача 5.8. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A_1 и B_1, в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 — в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

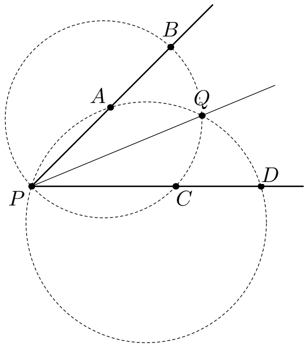
Занятие 6. Биссектриса делит дугу пополам

Задача 6.1. Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC. Точка D принадлежит стороне AC, причём $\angle DMC = \angle BAC$. Докажите, что $BM = MD$.

Задача 6.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = BC$, DB — биссектриса угла D, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Найдите угол CAD.

Задача 6.3. Биссектриса AL треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке W. Докажите, что прямая WC касается описанной окружности треугольника ACL.

Задача 6.4. Две окружности проходят через вершину угла P и точку его биссектрисы Q. Докажите, что отрезки AB и CD, высекаемые ими на сторонах угла (см. рисунок), равны.



Задача 6.5. Из точки A, расположенной вне окружности, проведены две касательные AM и AN (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая окружность в точках P и Q. Пусть L — середина PQ. Докажите, что $\angle MLA = \angle NLA$.

Задача 6.6. В треугольнике ABC стороны AC и BC не равны. Докажите, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из вершины C, тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

Задача 6.7. а) Восстановите треугольник по точкам пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

б) Объясните, как построить треугольник, если даны три отрезка, равные медиане, биссектрисе и высоте, проведённым из одной вершины.

Задача 6.8. Восстановите треугольник ABC по его инцентру (центру вписанной окружности), середине стороны BC и основанию биссектрисы, проведённой из вершины угла A.

Занятие 7. Счёт дуг

Задача 7.1. Докажите, что все углы, образованные сторонами и диагоналями правильного n-угольника, кратны $\dfrac{180^\circ}{n}$.

Задача 7.2. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямая A_1C_1 перпендикулярна прямой B_1D_1.

Задача 7.3. В окружность вписаны равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

Задача 7.4. а) Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B и C — три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

б) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть точки M и N — середины дуг CD и AB. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AEB (или содержит её).

Задача 7.5. На окружности даны точки A, B, C и D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что четырёхугольник $KECD$ вписанный.

Задача 7.6. Шестиугольник $ABCDEF$ вписанный, причем $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

Задача 7.7. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.

а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника ABC, то они содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат высоты треугольника ABC, то они содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Задача 7.8. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые, содержащие противоположные стороны AB и CD, при продолжении пересекаются в точке K, а прямые, содержащие стороны BC и AD, — в точке L. Докажите, что биссектрисы углов BKC и BLA перпендикулярны, а точки их пересечения со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

Задача 7.9. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть I_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а I_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Прямая I_1I_2 отсекает от треугольника AEB треугольник с вершиной E. Докажите, что он равнобедренный.

Занятие 8. Вписанный угол и ортоцентр

Задача 8.1. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найдите ГМТ ортоцентров треугольника ABC.

Задача 8.2. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Докажите, что точки A, центр описанной окружности O, инцентр I, ортоцентр H и C лежат на одной окружности.

Задача 8.3. а) Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC и AHC, равны между собой.

б) Три окружности равных радиусов проходят через точку H и попарно пересекаются в трёх других точках A, B и C. Докажите, что H — ортоцентр треугольника ABC.

Задача 8.4. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки B на A_1C_1, из точки A на B_1C_1 и из точки C на A_1B_1 пересекаются в одной точке. Что это за точка?

Задача 8.5. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH (точка H лежит на отрезке AB). Докажите, что $\angle ACM = \angle BCH$ тогда и только тогда, когда $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 8.6. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно середин его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника, и диаметрально противоположны его вершинам.

Задача 8.7. В треугольнике ABC угол A равен 60°; O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности, а I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $IO = IH$ и $I_aO = I_aH$.

Задача 8.8. Даны окружность и хорда AB, отличная от диаметра. По бóльшей дуге AB движется точка C. Окружность, проходящая через точки A, C и точку H — ортоцентр треугольника ABC, повторно пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что прямая PH проходит через фиксированную точку, не зависящую от положения точки C.

Занятие 9. Две пересекающиеся окружности

Задача 9.1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что угол AQB не зависит от положения секущей.

Задача 9.2. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B соответственно. Докажите, что треугольники AQB и O_1QO_2 подобны.

Задача 9.3. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q — секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Задача 9.4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке E. Докажите, что точки B, C, D и E лежат на одной окружности.

Задача 9.5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают обе окружности в точках A и B. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около всех таких треугольников AQB.

Даны две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной точки X первой окружности (*отличной от точек A и B*) *обозначим через Y и Z точки пересечения прямых XA и XB соответственно со второй окружностью.*

Задача 9.6. Докажите, что прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведённому через точку X.

Задача 9.7. а) Для каждой точки X построена прямая, содержащая высоту треугольника XYZ, проведённую из вершины X. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

б) Выбрана одна из двух дуг, на которую первую окружность делят точки A и B. Для каждой точки X выбранной дуги построена прямая, содержащая биссектрису треугольника XYZ, проведённую из вершины X. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

в) То же, что в п. а), но прямая содержит медиану.

Задача 9.8. Найдите положение точки X, при котором площадь треугольника XYZ наибольшая.

Задача 9.9. Найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников XYZ.

Задача 9.10. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ, вторично пересекает первую окружность в точке P. Докажите, что угол XPO_2 прямой.

Занятие 10. Точка Микеля

Задача 10.1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D соответственно. Докажите, что:

а) $AB = CD$;

б) треугольники AMC и BMD равнобедренные;

в) $\triangle ABM = \triangle CDM$;

г) $\angle AMC = \angle BMD = \angle O_1MO_2$;

д) M — центр поворота, переводящего треугольник ABM в треугольник CDM, а одну окружность в другую.

е) Докажите, что если окружности не равны, то треугольники подобны, причем M — центр поворотной гомотетии, переводящей один треугольник в другой и одну окружность в другую.

Задача 10.2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. M — точка Микеля для данных четырёх прямых. Докажите, что:

а) если $BE = DF$, то M — центр поворота, переводящего отрезок BE в FD;

б) M — центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BE в FD (или DE в FB);

в) докажите, что в п. а) точка M — середина дуги DE окружности, описанной около треугольника ADE;

г) докажите, что в п. б) точка M такова, что отношения $MD : ME$ и $DF : BE$ равны.

Задача 10.3. На стороне AB треугольника ABC выбирается точка E, а на луче BC (за точкой C) — точка F так, что $AE = CF$. Прямые AC и EF пересекаются в точке X. Рассмотрим треугольники AEX для всех пар E и F. Докажите, что окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.

Задача 10.4. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, AD и BC — в точке F. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих стороны четырёхугольника $ABCD$, лежит на отрезке EF.

Задача 10.5. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

Задача 10.6. а) Докажите утверждение, обратное теореме Симсона.

б) Докажите следующее обобщение. Дан треугольник ABC. Из точки P проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом к прямым BC, CA и AB соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P принадлежит описанной окружности треугольника ABC.

в) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

г) Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Задача 10.7. а) Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Рассмотрим поворот вокруг точки A, переводящий первую окружность во вторую. Пусть C — произвольная точка первой окружности, C' — её образ при этом повороте. Докажите, что прямая CC' проходит через точку B.

б) **Прямая Штейнера.** Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P — точка его описанной окружности. Докажите, что образы P_a, P_b и P_c точки P при симметрии относительно сторон треугольника лежат на одной прямой, проходящей через H.

в) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H; P — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам.

Задача 10.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — такие внутренние точки отрезков BC и AD соответственно, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые AC и EF пересекаются в точке R, прямые BD и EF пересекаются в точке Q. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех таких треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

Список литературы

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1991.

2. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. *Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений.* — М.: Просвещение, 1995.

3. Р. К. Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7–9 классов.* — М.: МЦНМО, 2004.

4. А. В. Погорелов. *Геометрия 7–9. Учебник для 7–9 классов.* — М.: Просвещение, 2003.

5. Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия.* Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004.

6. В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии.* — М.: МЦНМО, 2007.

7. И. Ф. Шарыгин. *Геометрия. 7–9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений.* — М.: Дрофа, 2000.

8. М. А. Волчкевич. *Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы.* — М.: МЦНМО, 2016.

Список веб-ресурсов

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

2. `http://geometry.ru/olimp.htm` — Всероссийская олимпиада по геометрии имени И. Ф. Шарыгина.

3. `http://olympiads.mccme.ru/ustn/` — устные геометрические олимпиады.

Оглавление

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: biblio.mccme.ru/shop/order

Книги в электронном виде: www.litres.ru/mcnmo

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru