ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ, МЕНЕЛАЯ И ВАН-ОБЕЛЯ

Г. Б. Филипповский, г. Киев

Много лет пришлось поработать в школе, чтобы составить свою точку зрения на методику преподавания теоремы Чевы в математических классах. Сегодня эта точка зрения есть. Она апробирована как на уроках, так и на занятиях спецкурсов. Есть ощущение, что у детей и учителя «получается»! Будет здорово, если такой подход пригодится коллегам, что-то им подскажет, принесёт пользу.

ЗАНЯТИЕ 1 (2 ЧАСА) ЧЕВА «ОБЫКНОВЕННЫЙ»

Джованни Чева (1648–1734) — итальянский геометр, по профессии инженер-гидравлик — в работе «О прямых линиях» доказал теорему, носящую его имя. Чева называл её задачей. Он предложил как чисто геометрическое решение, так и то, которое может быть получено исходя из механических соображений.

Чева родился в Милане, обучался в Пизанском университете. Будучи специалистом по гидравлике, работал экономистом (правительственным комиссаром) в одном из герцогств Италии. В математике Чева более всего интересовался коническими сечениями, построениями касательных к ним. Разрабатывал учение о секущих. Его ученик Д. Саккери был одним из тех, кто предвосхитил появление неевклидовой геометрии. И всё же для человечества Чева останется в первую очередь автором знаменитой, фундаментальной теоремы Чевы, которая решала (и решает) многие геометрические задачи.

Обычно в геометрической «табели о рангах» теоремы Чевы и Менелая стоят рядом. И это вполне справедливо. Они действительно близки по значимости, формульному виду, идейному смыслу. Более того, существует ряд задач, которые успешно решаемы как раз с помощью совместного применения теорем Чевы и Менелая. Вместе с тем не забудем, что теорема Менелая старше примерно на полторы тысячи лет (древнегреческий геометр Менелай жил в I в. н. э.). Именно поэтому среди большого количества способов доказательства теоремы Чевы мы выберем тот, который использует теорему Менелая — своей исторической предшественнице.

Теорема Чевы

Пусть чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке K (*рис. 1*). Докажите, что в таком случае

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

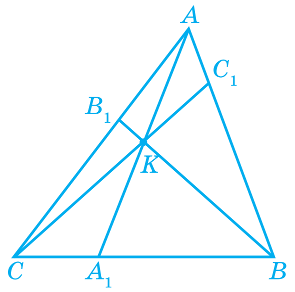

Рис. 1

Доказательство

Напомним содержание теоремы Менелая. Пусть некоторая прямая l пересекает стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках N, T и Q (*рис. 2*). Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

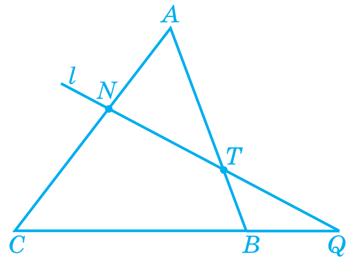

Рис. 2

Докажите теорему Менелая самостоятельно или же воспользуйтесь указанной в списке литературой.

Вновь переходим к рис. 1. По теореме Менелая для треугольника ACA_1 и секущей B_1-K-B имеем:

$$\frac{AK}{KA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (2)$$

По той же теореме Менелая для треугольника ABA_1 и секущей C_1-K-C получаем:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1K}{KA}=1. \qquad (3)$$

Перемножив (2) и (3) и проведя сокращение на AK, BC, A_1K, получим следующее:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

что равносильно доказательству теоремы Чевы.

Примечание 1. Так же, как верна обратная теорема Менелая, верна и обратная теорема Чевы: если для чевиан AA_1, BB_1, CC_1 выполняется равенство (1), то они пересекаются в одной точке (докажите самостоятельно!).

Примечание 2. На ряде несложных по своей сути задач-примеров продемонстрируем эффективное, изящное, красивое применение теоремы Чевы. В дальнейшем и прямую и обратную теорему Чевы мы будем просто называть теоремой Чевы.

Задача 1. Через точку K на медиане AM_1 треугольника ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1 (*рис. 3*). При этом оказалось, что $BB_1=CC_1$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

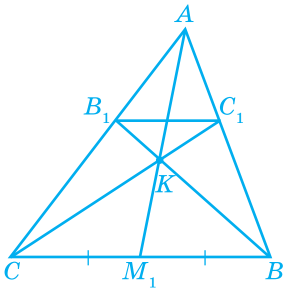

Рис. 3

Доказательство

Согласно теореме Чевы выполняется равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Так как $BM_1=CM_1$, то получаем:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1}{B_1C},$$

что означает: $B_1C_1 \parallel BC$ (по теореме Фалеса). Тогда BC_1B_1C — трапеция. Но её диагонали равны по условию:

$$BB_1=CC_1,$$

значит, она равнобокая и $\angle B=\angle C$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный.

Задача 2. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC: а) три медианы; б) три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Доказательство

а) Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC и AB соответственно (*рис. 4*).

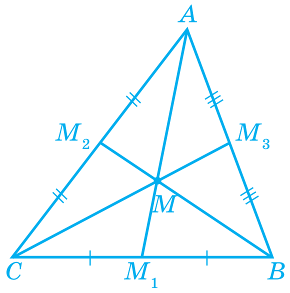

Рис. 4

Поскольку

$$AM_3=M_3B,\ \ BM_1=M_1C,\ \ CM_2=M_2A,$$

то выполняется следующее равенство:

$$\frac{AM_3}{M_3B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CM_2}{M_2A}=1.$$

А это и означает, что медианы AM_1, BM_2, CM_3 пересекаются в одной точке — центроиде M треугольника ABC.

б) Проведём биссектрисы AL_1, BL_2, CL_3 в треугольнике ABC (*рис. 5*).

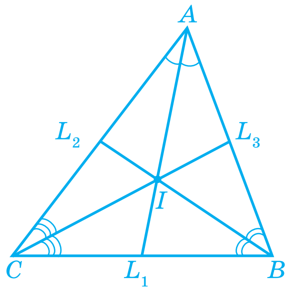

Рис. 5

Покажем, что они пересекаются в одной точке — инцентре I треугольника ABC. Для этого надо показать, согласно теореме Чевы, справедливость следующего равенства:

$$\frac{AL_3}{L_3B}\cdot\frac{BL_1}{L_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1. \qquad (4)$$

Но $\dfrac{AL_3}{L_3B}=\dfrac{AC}{BC}$ по свойству биссектрисы.

Аналогично

$$\frac{BL_1}{L_1C}=\frac{AB}{AC} \text{ и } \frac{CL_2}{L_2A}=\frac{BC}{AB}.$$

Подставив в (4), получим:

$$\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1,$$

что и требовалось доказать.

Задача 3 (лемма о трапеции). В произвольной трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований принадлежат одной прямой. Докажите.

Доказательство

Пусть диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке Q. Пусть также

$$T = AB \cap DC \text{ (рис. 6)}.$$

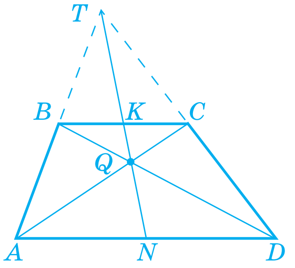

Рис. 6

Покажем, что N — точка пересечения прямых TQ и AD — является серединой AD.

По теореме Чевы для треугольника ATD и чевиан TN, AC и DB имеем:

$$\frac{TC}{CD} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{AB}{BT} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{TC}{CD} = \frac{TB}{BA} \ (BC \parallel AD),$$

то $\frac{DN}{NA} = 1$, или $DN = NA$. Так как $BC \parallel AD$, то и $CK = BK$, где $K = TQ \cap BC$.

Лемма о трапеции доказана!

Задача 4. Известно, что медиана AM_1, биссектриса BL_2 и высота CH_3 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$L_2H_3 \parallel BC.$$

Доказательство

Пусть AM_1, BL_2 и CH_3 пересекаются в точке K (*рис. 7*).

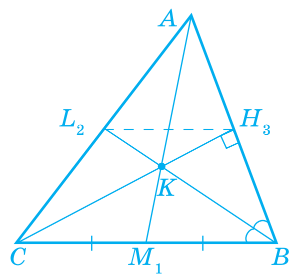

Рис. 7

Тогда по теореме Чевы справедливо равенство:

$$\frac{AH_3}{H_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1.$$

Однако $BM_1 = M_1C$. Следовательно,

$$\frac{AH_3}{H_3B} = \frac{AL_2}{L_2C}.$$

А это и означает, что $L_2H_3 \parallel BC$.

Задача 5. Три окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются внешним образом в точках K, N, T, как показано на *рис. 8*. Докажите, что отрезки AN, BT и CK пересекаются в одной точке.

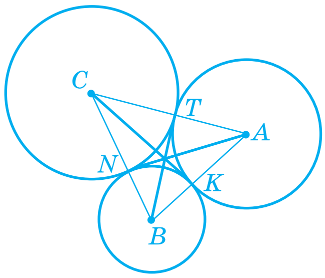

Рис. 8

Доказательство

Известно, что точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры (покажите!). Поэтому точки A, K, B принадлежат одной прямой. Аналогично: B, N, C и C, T, A.

Следовательно, ABC — треугольник.

Если мы докажем, что

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CT}{TA} = 1,$$

то это и будет означать, что AN, BT и CK пересекаются в одной точке.

Пусть окружности с центрами A, B, C имеют радиусы r_1, r_2, r_3 соответственно. Тогда необходимо доказать, что

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1.$$

А это верно. Таким образом, AN, BT и CK пересекаются в одной точке.

Задача 6. Внутри параллелограмма $ABCD$ на его диагонали BD взята произвольная точка K. Проведены отрезки $KN \parallel AB$ и $KT \parallel AD$ (*рис. 9*). Докажите, что AT и CN пересекаются на диагонали BD.

Доказательство

Проведём диагональ AC. Пусть $O = AC \cap BD$. Чтобы в треугольнике ACD отрезки AT, CN и DO пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия теоремы Чевы:

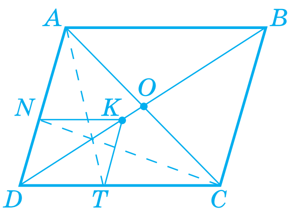

Рис. 9

$$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CT}{TD}\cdot\frac{DN}{NA}=1.$$

Так как $AO = OC$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), то остаётся доказать справедливость равенства

$$\frac{CT}{TD}=\frac{AN}{ND}.$$

А это верно.

Действительно,

$$\frac{CT}{TD}=\frac{BK}{KD}$$

(теорема Фалеса для треугольника BCD); в то же время

$$\frac{AN}{ND}=\frac{BK}{KD}$$

(теорема Фалеса для треугольника ABD). Следовательно, прямые AT и CN пересекаются на диагонали BD.

Задача 7. В треугольник ABC вписана полуокружность ω с центром на стороне BC и касающаяся AB и AC в точках K и N соответственно (*рис. 10*). Докажите, что отрезки BN, CK и высота AH_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке.

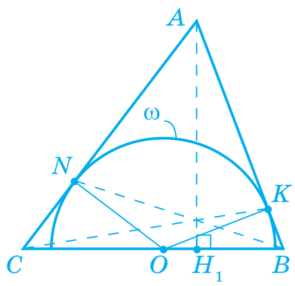

Рис. 10

Доказательство

Для выполнения требования задачи согласно теореме Чевы должно быть выполнено следующее равенство:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

Поскольку $AK = AN$ (касательные к ω, проведённые из точки A), то остаётся показать, что

$$\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=1.$$

Но

$$BH_1 = AH_1\cdot\operatorname{ctg}B$$

(из треугольника AH_1B) и $CH_1 = AH_1\cdot\operatorname{ctg}C$ (из треугольника AH_1C). Пусть O — центр полуокружности ω. Тогда

$$OK = ON = R_\omega,$$

а $KB = R_\omega\cdot\operatorname{ctg}B$ (из треугольника OKB);

$$CN = R_\omega\cdot\operatorname{ctg}C$$

(из треугольника ONC). Следовательно,

$$\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=\frac{AH_1\cdot\operatorname{ctg}B}{AH_1\cdot\operatorname{ctg}C}\cdot\frac{R_\omega\cdot\operatorname{ctg}C}{R_\omega\cdot\operatorname{ctg}B}=1,$$

что и требовалось показать.

Задача 8. Постройте треугольник ABC по сторонам $BC = a$, $AB = c$, если известно, что в этом треугольнике медиана AM_1, биссектриса BL_2 и высота CH_3 пересекаются в одной точке.

Построение

Пусть T — точка пересечения медианы AM_1, биссектрисы BL_2 и высоты CH_3 (*рис. 11*).

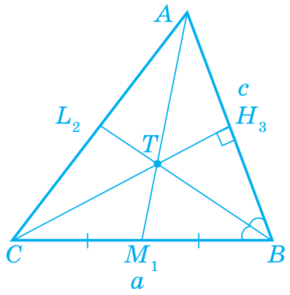

Рис. 11

Тогда по теореме Чевы выполняется равенство

$$\frac{AH_3}{H_3B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1.$$

Но $BM_1 = M_1C$. Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{AL_2}{L_2C}.$$

По свойству биссектрисы

$$\frac{AL_2}{L_2C}=\frac{c}{a},$$

то есть

$$\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{c}{a},\ \text{или}\ \frac{c-H_3B}{H_3B}=\frac{c}{a},$$

откуда

$$H_3B=\frac{ac}{a+c}.$$

Окружность, построенная на BC как на диаметре, и засечка из точки B раствором циркуля, равным H_3B, дадут точку H_3. Дальнейшее очевидно.

Задача 9. Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка D такая, что

$$\frac{BD}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n.$$

Постройте на этой же стороне BC точку K такую, что

$$\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{n+1}.$$

Построение

Проведём биссектрису AL_1 треугольника ABC (*рис. 12*).

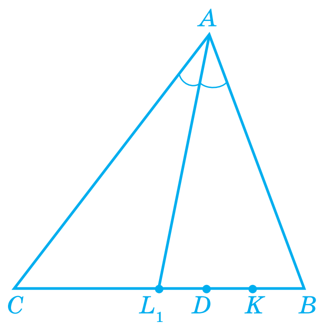

Рис. 12

Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{BL_1}{CL_1}=\frac{AB}{AC}.$$

Запишем требование задачи в таком виде:

$$\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n\cdot\frac{AB}{AC}.$$

С учётом условия и свойства биссектрисы получим:

$$\frac{BK}{CK}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1},$$

или

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1}\cdot\frac{CK}{BK}=1, \qquad (1)$$

что уже согласуется с условием теоремы Чевы. Поскольку все действия в задаче происходят на стороне BC, то строим равносторонний треугольник ENT со стороной, равной BC (*рис. 13*).

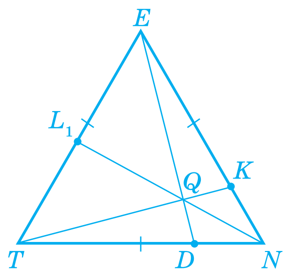

Рис. 13

На NT находим точку D согласно условию. На ET строим точку L_1 согласно построению рис. 12. Пусть ED и NL_1 пересекаются в точке Q. Тогда луч TQ согласно условию (1) пересекает EN в искомой точке K. Так как $EN=BC$, то точка K построена.

Задача 10. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

Доказательство

Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно, а E, N и T — середины соответственно высот AH_1, BH_2 и CH_3 треугольника ABC (*рис. 14*).

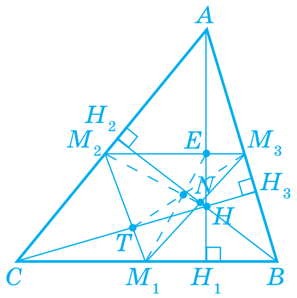

Рис. 14

Очевидно, точки E, N, T принадлежат соответственно средним линиям M_2M_3, M_1M_3 и M_1M_2 треугольника ABC.

Чтобы M_1E, M_2N и M_3T пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия теоремы Чевы для треугольника $M_1M_2M_3$:

$$\frac{M_2E}{EM_3}\cdot\frac{M_3N}{NM_1}\cdot\frac{M_1T}{TM_2}=1. \qquad (1)$$

Нетрудно показать с помощью подобия, что

$$\frac{M_2E}{EM_3}=\frac{CH_1}{H_1B},$$

$$\frac{M_3N}{NM_1}=\frac{AH_2}{H_2C} \text{ и } \frac{M_1T}{TM_2}=\frac{BH_3}{H_3A}$$

(покажите!).

Тогда равенство (1) идентично равенству

$$\frac{AH_2}{H_2C}\cdot\frac{CH_1}{H_1B}\cdot\frac{BH_3}{H_3A}=1.$$

Последнее равенство верно, так как высоты AH_1, BH_2, CH_3 пересекаются в одной точке — ортоцентре H. Значит, верно и равенство (1), что соответствует требованиям задачи.

Задача 11. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке Q. Через вершину A проведена прямая $l \parallel BC$ (*рис. 15*). Пусть

$$N = A_1B_1 \cap l \text{ и } T = A_1C_1 \cap l.$$

Докажите, что $AN = AT$.

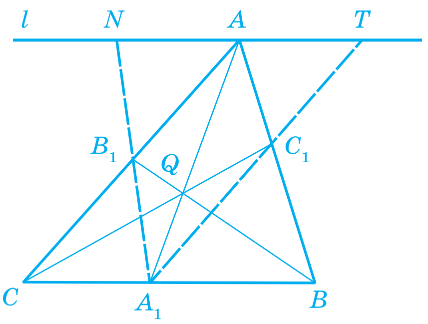

Рис. 15

Доказательство

Подобие треугольников NB_1A и A_1B_1C даёт следующую пропорцию:

$$\frac{AN}{A_1C}=\frac{AB_1}{B_1C},$$

откуда

$$AN = A_1C\cdot\frac{AB_1}{B_1C}. \quad (1)$$

Поскольку также $\Delta AC_1T \sim \Delta BC_1A_1$, то имеем:

$$\frac{AT}{BA_1}=\frac{AC_1}{C_1B}, \text{ или } AT = BA_1\cdot\frac{AC_1}{C_1B}. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим:

$$\frac{AN}{AT}=\frac{A_1C}{BA_1}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}. \quad (3)$$

Так как правая часть равенства (3) равна 1 по теореме Чевы, то

$$\frac{AN}{AT}=1, \text{ или } AN = NT.$$

Задача 12. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Q. A_1T — перпендикуляр к прямой B_1C_1 (*рис. 16*). Докажите, что TA_1 — биссектриса угла BTC.

Доказательство

Обозначим соответствующие углы:

$$\angle CTA_1 = \angle 1,\ \angle BTA_1 = \angle 2,$$

$$\angle CTB_1 = \angle 3 \text{ и } \angle BTC_1 = \angle 4.$$

Требование задачи: показать, что $\angle 1 = \angle 2$. Если мы покажем, что $\angle 3 = \angle 4$, то задача решена, так как $\angle 1 = 90° - \angle 3$ и $\angle 2 = 90° - \angle 4$. Итак, докажем, что $\angle 3 = \angle 4$. Проведём перпендикуляры AN, BE и CK к прямой B_1C_1.

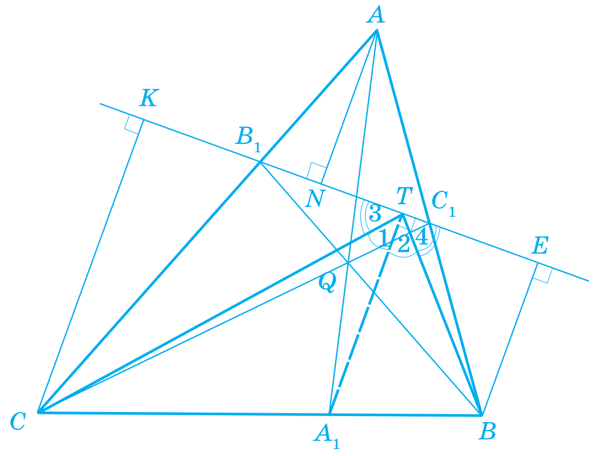

Рис. 16

Тогда

$$\frac{AN}{BE}=\frac{AC_1}{C_1B} \quad (1)$$

из подобия треугольников ANC_1 и BEC_1,

$$\frac{AN}{CK}=\frac{AB_1}{B_1C}, \quad (2)$$

так как $\Delta ANB_1 \sim \Delta CKB_1$. Согласно теореме Чевы (AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Q) имеем:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

или, с учётом (1) и (2)

$$\frac{AN}{BE}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CK}{AN}=1, \text{ или } \frac{BE}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}.$$

Но по теореме Фалеса

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{ET}{TK},$$

откуда

$$\frac{BE}{CK}=\frac{ET}{TK}.$$

Таким образом, $\Delta BET \sim \Delta CKT$ и $\angle 3 = \angle 4$. А значит, $\angle 1 = \angle 2$ и TA_1 — биссектриса угла BTC.

Прежде чем перейти к задачам для самостоятельного решения, сделаем следующие замечания.

Замечание 1. Теорема Чевы остаётся справедливой и для внешней точки F (*рис. 17*), когда, например, точки A_1 и B_1 лежат на продолжениях сторон CB и CA соответственно (покажите самостоятельно).

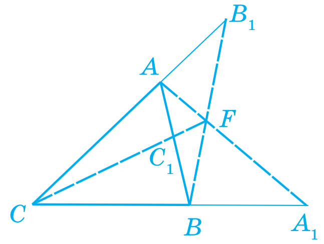

Рис. 17

Замечание 2. Как и теорема Менелая, теорема Чевы имеет своё стереометрическое обобщение (верное в обе стороны):

Чтобы через точки E, K, N, T, которые лежат соответственно на рёбрах DA, DB, BC, AC тетраэдра $DABC$ (или на их продолжениях), можно было провести плоскость (*рис. 18*), необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{DK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AE}{ED}=1.$$

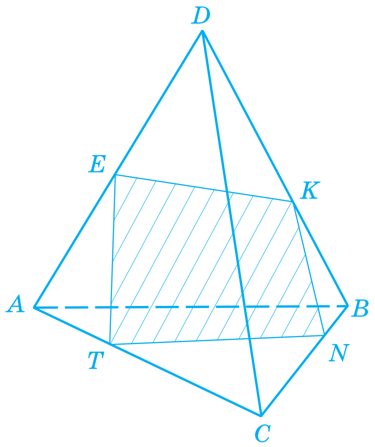

Рис. 18

Доказательство пространственного обобщения теоремы Чевы можно найти, например, в [14].

Задачи для самостоятельного решения

Задача 13. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (точке Жергонна).

Задача 14. Докажите, что отрезки, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке (точке Нагеля).

Задача 15. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q.

$$K = AB \cap CD,$$

а N — середина AD. Известно, что точки K, Q, N лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

Задача 16. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC.

$$K = BO \cap AC \text{ и } N = CO \cap AB.$$

При этом оказалось, что $AK = AN$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Задача 17. Дан прямоугольный треугольник ABC ($C = 90°$). На катетах AC и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ACDN$ и $CBTK$. Докажите, что BN и AT пересекаются на высоте CH_3 треугольника ABC.

Задача 18. Известно, что высота AH_1, биссектриса BL_2 и медиана CM_3 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\cos C}.$$

Задача 19. Пусть Q — произвольная точка на высоте AH_1 треугольника ABC. Пусть также

$$K = BQ \cap AC \text{ и } N = CQ \cap AB.$$

Докажите, что H_1K и H_1N образуют равные углы с высотой AH_1.

Задача 20. Стороны AB и BC треугольника ABC разделены на три равные части каждая

$$(AK = KN = NB \text{ и } BD = DE = EC).$$

Пусть

$$F = AE \cap CK \text{ и } T = AD \cap CN.$$

Докажите, что точки B, T, F и M_2 (середина AC) принадлежат одной прямой.

Задача 21. Три касательные к окружности образуют треугольник. Докажите, что прямые, соединяющие вершины этого треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Задача 22. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отложили отрезок

$$BN = AC.$$

Докажите, что медиана CE, биссектриса AF и высота NT треугольника ACN пересекаются в одной точке.

Задача 23. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (медиана тетраэдра — это отрезок, соединяющий его вершину с центроидом противоположной грани).

ЗАНЯТИЕ 2 (2 ЧАСА)
ЧЕВА «СО ЗВЁЗДОЧКОЙ»

Ниже вниманию читателей будут предложены несколько более сложные задачи с применением теоремы Чевы. Хотя вопрос о том, сложна или не очень та или иная задача, остаётся достаточно субъективным...

Задача 1. Докажите теорему Чевы в её тригонометрической форме:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1 \ (\textit{рис. 1}).$$

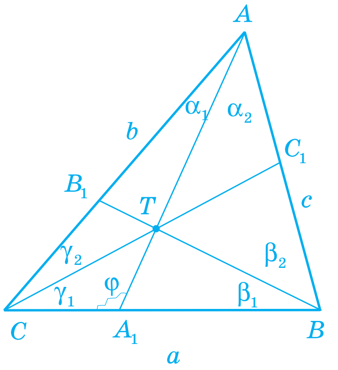

Рис. 1

Доказательство

Пусть стороны BC, AC и AB треугольника ABC соответственно равны a, b, c, а чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке T. По теореме синусов для треугольника ACA_1 получаем:

$$\frac{CA_1}{\sin\alpha_1}=\frac{b}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

По той же теореме для треугольника ABA_1:

$$\frac{A_1B}{\sin\alpha_2}=\frac{c}{\sin(180^\circ-\varphi)}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{b\sin\alpha_1}{c\sin\alpha_2}. \qquad (3)$$

Аналогично получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{c\sin\beta_1}{a\sin\beta_2} \qquad (4)$$

и

$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{a\sin\gamma_1}{b\sin\gamma_2}. \qquad (5)$$

Перемножив левые и правые части равенств (3), (4), (5), получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Поскольку левая часть последнего равенства равна 1 (теорема Чевы), то получаем требуемое:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

Задача 2. Внутри треугольника ABC находятся точки K и N такие, что $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (*рис. 2*). Докажите, что $\angle 5=\angle 6$.

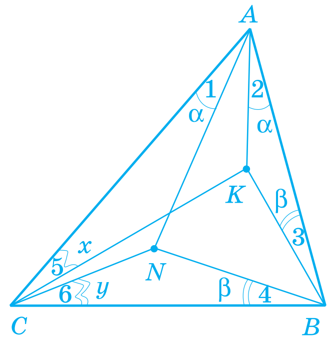

Рис. 2

Доказательство

Пусть

$$\angle 1=\angle 2=\alpha,\ \angle 3=\angle 4=\beta,\ \angle 5=x \text{ и } \angle 6=y.$$

Для чевиан AK, BK, CK тригонометрическую форму теоремы Чевы запишем так:

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-x)}{\sin x}=1. \qquad (1)$$

Аналогично для чевиан AN, BN, CN:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}=1. \qquad (2)$$

Перемножив левые и правые части равенств (1) и (2), получим:

$$\frac{\sin(C-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}=1,$$

или

$$\sin x\cdot\sin(C-y)=\sin y\cdot\sin(C-x).$$

Преобразовав произведения синусов в сумму, после сокращения получим:

$$\cos(x+C-y)=\cos(y+C-x),$$

откуда $x=y$.

Задача 3. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом $A=110^\circ$. Внутри него находится точка T такая, что

$$\angle TBC=30^\circ,\ \angle TCB=25^\circ.$$

Найдите величину $\angle ATC=\varphi$.

Решение

Пусть $\angle TAC = x$, тогда

$$\angle TAB = 110° - x \text{ (рис. 3).}$$

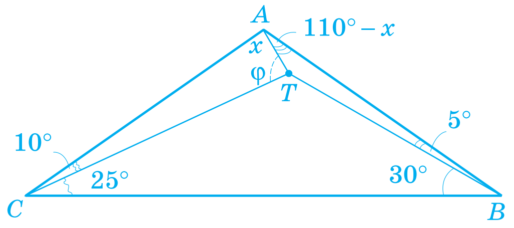

Рис. 3

Очевидно,

$$\angle TBA = 5° \text{ и } \angle TCA = 10°.$$

Согласно тригонометрической форме теоремы Чевы для чевиан AT, BT и CT имеем:

$$\frac{\sin x}{\sin(110° - x)} \cdot \frac{\sin 5°}{\sin 30°} \cdot \frac{\sin 25°}{\sin 10°} = 1.$$

Учитывая, что

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \text{ и } \sin 10° = 2\sin 5° \cdot \cos 5°,$$

получим:

$$\sin x \cdot \sin 25° = \sin(110° - x) \cdot \cos 5°,$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\cos(x - 25°) - \cos(x + 25°)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin(115° - x) + \sin(105° - x)\right).$$

Поскольку

$$\sin(115° - x) = \cos(25° - x) = \cos(x - 25°),$$

а $\sin(105° - x) = \cos(15° - x)$, получим следующее равенство:

$$\cos(x + 25°) + \cos(15° - x) = 0,$$

или

$$2\cos 20° \cdot \cos(x + 5°) = 0,$$

откуда $x = 85°$.

Тогда из ΔATC:

$$\varphi = 180° - 85° - 10° = 85°.$$

Задача 4. Дан треугольник ABC со следующими углами: $A = 50°$, $B = 60°$, $C = 70°$. Точка T внутри треугольника ABC такова, что $\angle ATB = 110°$, $\angle BTC = 130°$. Найдите величину угла TBC.

Решение

Обозначим искомый $\angle TBC$ через x (*рис. 4*). Нетрудно тогда подсчитать, что

$$\angle TBA = 60° - x,\ \angle TAB = 10° + x,\ \angle TAC = 40° - x,$$

$$\angle TCB = 50° - x \text{ и } \angle TCA = 20° + x.$$

Тригонометрическая форма теоремы Чевы для чевиан AT, BT, CT будет в таком случае выглядеть так:

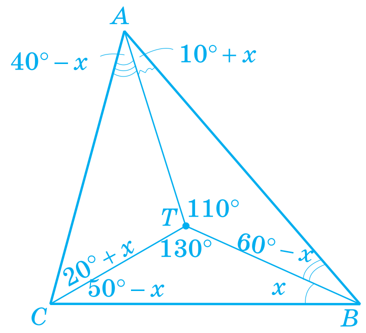

Рис. 4

$$\frac{\sin(40° - x)}{\sin(10° + x)} \cdot \frac{\sin(60° - x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin(50° - x)}{\sin(20° + x)} = 1. \quad (1)$$

При этом, очевидно, искомый угол $x < 40°$ (точка T внутри треугольника и $\angle TAC = 40° - x$). Согласно равенству (1) имеем:

$$\sin(40° - x) \cdot \sin(60° - x) \cdot \sin(50° - x) =$$

$$= \sin x \cdot \sin(10° + x) \cdot \sin(20° + x). \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что левая часть равенства (2) является убывающей функцией, а правая — возрастающей. Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного решения. Его можно подобрать: $x = 20°$.

Задача 5. Из точки A вне окружности ω проведены AB и AC — касательные к ней. А также — произвольные секущие $A-D-E$ и $A-K-N$ (*рис. 5*). Докажите, что DN, KE и BC пересекаются в одной точке.

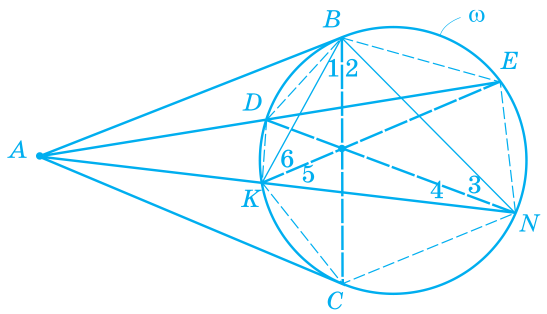

Рис. 5

Доказательство

Обозначим цифрами от 1 до 6 соответствующие углы на рис. 5.

Если для треугольника BNK будет выполнена тригонометрическая форма теоремы Чевы:

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} \cdot \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4} \cdot \frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6} = 1, \quad (1)$$

то это и будет означать, что DN, KE и BC пересекаются в одной точке. Заметим, что синусы указанных углов пропорциональны соответствующим хордам. Действительно,

$$KC = 2R_\omega \cdot \sin\angle 1,\quad CN = 2R_\omega \cdot \sin\angle 2$$

и так далее.

Тогда доказать равенство (1) — это всё равно, что доказать равенство:

$$\frac{KC}{CN}\cdot\frac{BD}{DK}\cdot\frac{EN}{BE}=1. \qquad (2)$$

Покажем, что равенство (2) верно.

Так как $\Delta ABD \sim \Delta AEB$ (по двум углам), то

$$\frac{BD}{BE}=\frac{AB}{AE}. \qquad (3)$$

Аналогично:

$$\Delta ACK \sim \Delta ANC \text{ и } \frac{KC}{CN}=\frac{AK}{AC}. \qquad (4)$$

Из подобия треугольников AEN и AKD получим:

$$\frac{EN}{DK}=\frac{AE}{AK}. \qquad (5)$$

Перемножив левые и правые части равенств (3), (4), (5) и учитывая то, что $AC = AB$ (касательные к ω), получим требуемое:

$$\frac{KC}{CN}\cdot\frac{BD}{DK}\cdot\frac{EN}{BE}=1.$$

Задача 6. Пользуясь только линейкой, из точки A вне окружности ω проведите касательную к ней.

Решение

Воспользовавшись результатом задачи 5, это несложно сделать.

Проведём сначала две пары произвольных секущих

$$(A-D-E \text{ и } A-K-N),$$
$$(A-F-G \text{ и } A-L-M).$$

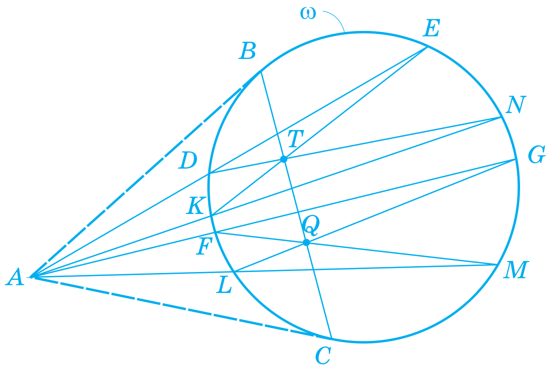

Рис. 6

Затем через точки T и Q пересечения соответствующих хорд проведём прямую, пересекающую окружность ω в точках B и C (*рис. 6*). AB и AC — искомые касательные.

Задача 7. В остроугольном треугольнике ABC высота AH_1, биссектриса BL_2 и медиана CM_3 пересекаются в одной точке. Докажите, что $B > 45°$.

Доказательство

Пусть AH_1, BL_2 и CM_3 пересекаются в точке T (*рис. 7*).

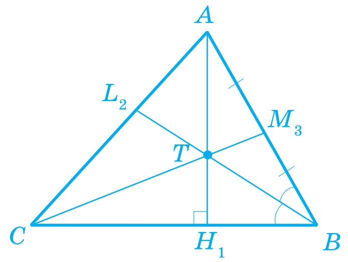

Рис. 7

Тогда по теореме Чевы имеем:

$$\frac{AM_3}{M_3B}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1.$$

Но

$$AM_3 = M_3B;\quad \frac{CL_2}{L_2A}=\frac{BC}{AB}$$

(по свойству биссектрисы), а

$$BH_1 = AB\cdot\cos B$$

(из ΔABH_1) и $CH_1 = AC\cdot\cos C$ (из ΔACH_1).

Получаем:

$$\frac{AB\cdot\cos B}{AC\cdot\cos C}\cdot\frac{BC}{AB}=1.$$

Учитывая, что

$$BC = 2R\cdot\sin A \text{ и } AC = 2R\cdot\sin B,$$

получим следующее:

$$\sin A\cdot\cos B = \sin B\cdot\cos C, \text{ или } \operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\cos C}.$$

Пусть $\operatorname{tg} B < 1$. Тогда

$$\sin A < \cos C, \text{ или } \sin A < \sin(90° - C).$$

Так как функция синус для острых углов возрастает, то

$$A < 90° - C, \text{ или } A + C < 90°.$$

Значит, $B > 90°$, что противоречит условию (ΔABC — остроугольный). Следовательно, наше предположение неверно и $\operatorname{tg} B > 1$, то есть $B > 45°$.

Задача 8. Из произвольной точки T внутри треугольника ABC проведены перпендикуляры

TD, TE и TF к сторонам BC, AC и AB соответственно (*рис. 8*). Точка A_1 — середина TA, точка A_2 — середина EF. Аналогично получены точки B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Доказательство

TA — диаметр окружности, описанной около четырёхугольника $AETF$ ($\angle AET = \angle AFT = 90°$). Значит, точка A_1 — центр этой окружности. Тогда A_1A_2 — серединный перпендикуляр к EF. Аналогично B_1B_2 и C_1C_2 — серединные перпендикуляры к FD и DE соответственно. А серединные перпендикуляры к сторонам треугольника DEF пересекаются в одной точке — центре описанной около этого треугольника окружности.

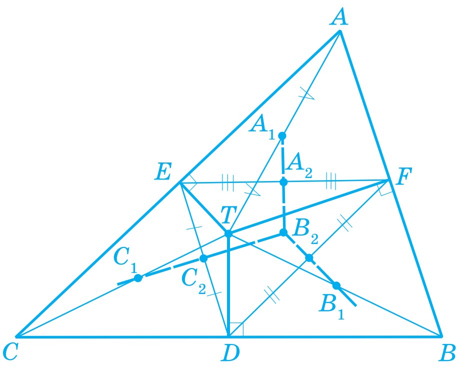

Рис. 8

Задача 9. Чевианы AD, BE, CF треугольника ABC пересекаются в точке T внутри треугольника. Докажите, что площадь S_T чевианного треугольника DEF можно вычислить по формуле

$$S_T = \frac{xyz}{2R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC; $AF = x$; $BD = y$; $CE = z$ (*рис. 9*).

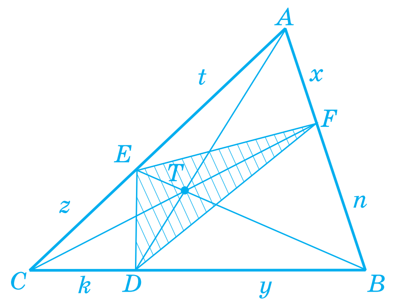

Рис. 9

Доказательство

Введём следующие обозначения:

$$BC = a,\quad AC = b,\quad AB = c,$$

$$BF = n,\quad DC = k,\quad EA = t.$$

Очевидно, $xyz = nkt$ (1) — по теореме Чевы.

Пусть также

$$S_{ABC} = S,\ S_{AEF} = S_1,\ S_{BFD} = S_2 \text{ и } S_{DCE} = S_3.$$

При этом

$$\frac{S_1}{S} = \frac{xt}{bc}$$

(треугольники AEF и ABC имеют общую вершину A).

Аналогично $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{ny}{ac}$ и $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{kz}{ab}$.

Тогда

$$S_T = S\left(1 - \frac{xt}{bc} - \frac{ny}{ac} - \frac{kz}{ab}\right) = S\left(\frac{abc - axt - bny - ckz}{abc}\right).$$

Поскольку $a = k + y$, $b = z + t$ и $c = x + n$, находим значение выражения

$$abc - axt - bny - ckz.$$

После упрощений получаем:

$$abc - axt - bny - ckz = xyz + nkt = 2xyz$$

— с учётом равенства (1).

Итак,

$$S_T = S \cdot \frac{2xyz}{abc}.$$

С учётом формулы

$$S = \frac{abc}{4R}$$

получаем требуемое:

$$S_T = \frac{xyz}{2R}.$$

Задача 10. AL_1, BL_2, CL_3 — биссектрисы треугольника ABC.

$$K = BL_2 \cap L_1L_3 \text{ и } N = CL_3 \cap L_1L_2$$

(*рис. 10*). Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC является также биссектрисой угла NAK, или что $x = y$.

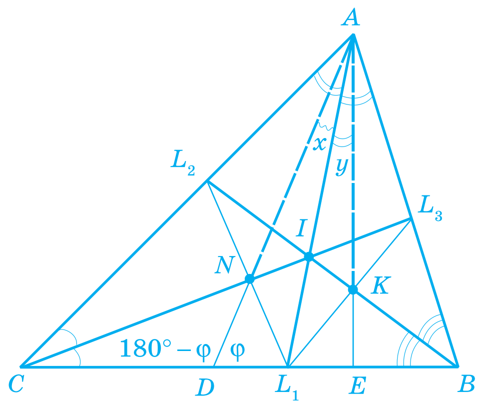

Рис. 10

Доказательство

Пусть лучи AN и AK пересекают сторону BC в точках D и E соответственно. Пусть также $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $AL_1 = l_a$.

Обозначим

$$\angle ADB = \varphi,$$

тогда

$$\angle ADC = 180° - \varphi.$$

По теореме синусов для треугольника ADL_1 имеем:

$$\frac{DL_1}{\sin x} = \frac{l_a}{\sin\varphi},$$

откуда

$$\sin x = \frac{DL_1 \cdot \sin\varphi}{l_a}. \quad (1)$$

По этой же теореме для треугольника ACD:

$$\frac{CD}{\sin\left(\frac{A}{2} - x\right)} = \frac{b}{\sin(180° - \varphi)},$$

откуда

$$\sin\left(\frac{A}{2} - x\right) = \frac{CD \cdot \sin\varphi}{b}. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), получим:

$$\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2} - x\right)} = \frac{DL_1}{CD} \cdot \frac{b}{l_a}. \quad (3)$$

По теореме Чевы для треугольника ACL_1:

$$\frac{DL_1}{CD} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} \cdot \frac{AI}{IL_1} = 1.$$

Учитывая, что

$$\frac{CL_2}{L_2A} = \frac{a}{c}$$

(свойство биссектрисы), получим:

$$\frac{DL_1}{CD} = \frac{c}{a} \cdot \frac{IL_1}{AI}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3). Тогда

$$\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2} - x\right)} = \frac{bc}{al_a} \cdot \frac{IL_1}{AI}. \quad (5)$$

Аналогично записав теоремы синусов для треугольников AEL_1 и ABE, а также теорему Чевы для треугольника ABL_1, получим:

$$\frac{\sin y}{\sin\left(\frac{A}{2} - y\right)} = \frac{bc}{al_a} \cdot \frac{IL_1}{AI}. \quad (6)$$

Тогда из (5) и (6) следует:

$$\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2} - x\right)} = \frac{\sin y}{\sin\left(\frac{A}{2} - y\right)}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha \cdot \sin(\varphi - \alpha) - \cos(\varphi - \alpha) \cdot (-1)\sin\alpha}{\sin^2(\varphi - \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha)}.$$

Так как $0 < \varphi < 180°$, то $\sin\varphi > 0$ и $f'(\alpha) > 0$.

Таким образом, функция $f(\alpha)$ строго возрастает и, следовательно, достигает каждого своего значения только при одном и том же значении α. Значит, $x = y$, что и требовалось доказать.

Задача 11. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Через произвольную точку внутри него проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Найдите среди этих точек точку T такую, для которой произведение $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$ было бы максимальным (*рис. 11*).

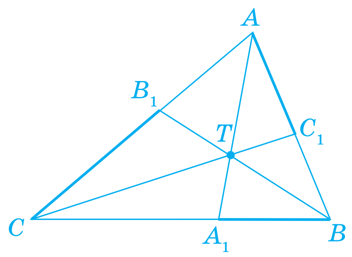

Рис. 11

Решение

По теореме Чевы:

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A. \quad (1)$$

Согласно неравенству Коши:

$$\sqrt{AC_1 \cdot C_1B} \le \frac{AC_1 + C_1B}{2} = \frac{c}{2}. \quad (2)$$

Аналогично:

$$\sqrt{BA_1 \cdot A_1C} \le \frac{BA_1 + A_1C}{2} = \frac{a}{2}, \quad (3)$$

$$\sqrt{CB_1 \cdot B_1A} \le \frac{CB_1 + B_1A}{2} = \frac{b}{2}. \quad (4)$$

Перемножив левые и правые части неравенств (2), (3), (4), с учётом равенства (1) получим:

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 \le \frac{abc}{8}.$$

Очевидно, равенство имеет место, когда точки A_1, B_1, C_1 совпадают с серединами соответствующих сторон. Тогда точка T совпадёт с центроидом треугольника ABC $(T \equiv M)$. При этом максимальное значение произведения

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$$

равно $\dfrac{abc}{8}$.

Несколько задач «со звёздочкой» (на наш взгляд) с применением теоремы Чевы предложим решить самостоятельно.

Задача 12. Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (симедианой называют прямую, симметричную медиане треугольника относительно биссектрисы того же угла).

Задача 13. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол A равен $80°$. Внутри треугольника ABC взята точка T такая, что $\angle TBC = 30°$, а $\angle TCB = 10°$. Найдите величину угла ATC.

Задача 14. $ABCDEF$ — вписанный в окружность шестиугольник. Известно, что выполняется равенство:

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA.$$

Докажите, что в таком случае AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Задача 15. D — точка на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. O_1 и O_2 соответственно центры описанных окружностей треугольников ACD и BCD. Пусть

$$N = AO_2 \cap BO_1.$$

Докажите, что $\angle BCN = \angle ACD$.

Задача 16. В треугольник ABC вписана окружность. На её радиусах, проведённых в точки касания, взяты точки на равных расстояниях от центра и соединены с противоположными вершинами. Докажите, что три получившиеся таким образом прямые пересекаются в одной точке.

Задача 17. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник с равными углами B и D. $AK \perp BC$ ($K \in BC$) и $AN \perp CD$ ($N \in CD$),

$$T = DK \cap BN.$$

Докажите, что $AT \perp KN$.

Задача 18. Через произвольную точку внутри треугольника ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что площадь чевианного треугольника $A_1B_1C_1$ не превышает $\dfrac{1}{4}$ площади треугольника ABC.

Задача 19 (теорема Максвелла). Внутри треугольника ABC взята произвольная точка T. Построен треугольник DEF со сторонами, параллельными отрезкам TA, TB, TC. Через вершины треугольника DEF проведены прямые параллельно сторонам треугольника ABC. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Задача 20. Точка T внутри треугольника ABC такова, что

$$\angle ATB - C = \angle ATC - B.$$

Пусть I_1 и I_2 соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники ABT и ACT. Докажите, что прямые AT, BI_1 и CI_2 пересекаются в одной точке.

Окончание следует.